INFORMATION AND CONTROL 42, 194–260 (1979)

Substitutions dans les EDT0L Systèmes Ultralinéaires

MICHEL LATTEUX

Université de Lille I, U.E.R. I.E.E.A., Service informatique, Bâtiment M3, B.P. 36, 59650 Villeneuve d'Ascq, France

We study EDT0L-systems with terminal alphabet in which all words derivated from the axiom countain a bounded number of occurrences of non-terminals. We define, also, unary operators associated with these systems.

INTRODUCTION

Les systèmes de Lindenmayer, introduits en 1968, pour rendre compte du développement cellulaire de certaines espéces vivantes, ont comme principale caractéristique le fait qu'à chaque étape de la dérivation, toutes les occurrences des lettres du mot se dérivent simultanément. Les ET0L-langages ont été définis, soit comme intersection d'un T0L-langage avec T^* où T est un alphabet (cf. Herman et Rozenberg, 1975), soit comme langage engendré par une grammaire simultanée (Latteux, 1974) (T0L-système où les lettres terminales demeurent inchangées tout au long de la dérivation). Cette deuxième définition conduit naturellement à s'intéresser aux T0L-systèmes avec alphabet terminal, pour lesquels il existe un entier k tel que tout mot dérivé de l'axiome contient au maximum k occurrences de non-terminaux ainsi qu'à la famille de langages correspondante que nous noterons LULT $(2k)$. On montre alors, en particulier, que le système peut être pris déterministe et que les langages obtenus sont des PSL-langages (Rozenberg et Vermeir, 1978) (leur image par la fonction de Parikh est un ensemble semilinéaire).

C'est la hiérarchie LULT $(2k)$ que nous étudions en détail dans ce papier. Pour définir un rang le plus "représentatif" possible, nous sommes amenés à définir les k-EDT0L-systèmes ultralinéaires libres. Nous pouvons, alors, calculer pour diverses opérations sur les langages, le rang du langage obtenu à partir du rang des langages de départ. Ceci nous permet, en particulier, de retrouver immédiatement un bon nombre de résultats classiques concernant les langages algébriques ultralinéaires et quasi-rationnels (Boasson, Crestin et Nivat, 1973). Nous obtenons des résultats similaires pour les k-EDT0L-systèmes linéaires qui sont des cas particuliers de k-EDT0L-système ultralinéaire. La famille de langages correspondante, égale au plus petit cône rationnel clos par replication, a déjà été étudiée dans Ginsburg et Spanier (1971) et dans Greibach (1972).

0019-9958/79/080194–67$02.00/0

Enfin, à ces familles de langages, nous faisons correspondre des familles d'opérateurs unaires liés à la substitution et nous obtenons des propriétés générales qui concernent l'application de ces opérateurs à n'importe quel cône rationnel clos par union.

Plan détaillé

Dans la première section, nous définissons les k-EDT0L-systèmes ultralinéaires sous forme normale (u.s.f.n.) que nous utiliserons tout au long de ce papier. Nous montrons que tout k-EDT0L-système ultralinéaire est équivalent à un k-EDT0L-système u.s.f.n. Nous en déduisons, en premier lieu, que la famille LULT $= \bigcup_{k \geqslant 1}$ LULT $(2k)$ est égale à la famille des "Absolutely Parallel Languages" définie par Rajlich (1972). En utilisant le fait que tout cône rationnel clos par duplication est clos par intercalation finie (proposition I.3), nous montrons que LULT est un cône rationnel clos par substitution et intercalation finie. Enfin les résultats de Latteux (1976) permettent de donner une caractérisation simple des langages bornés appartenant à LULT: tout langage borné de LULT est l'image homomorphe de l'intersection de deux langages algébriques bornés.

Dans la deuxième section, nous introduisons les k-EDT0L-systèmes ultralinéaires libres (à droite) qui sont des k-EDT0L-systèmes ultralinéaires tels que tout mot se dérivant de l'axiome et contenant au moins un non-terminal commence ou se termine (se termine) par un non-terminal et nous montrons l'équivalence de ces deux systèmes. La famille de langages correspondante, notée LULT $(2k - 1)$, est une FAL ou famille agréable de langages (cône rationnel clos par union, produit et pour l'opération étoile) non translatable.

La section trois comporte la démonstration de la principalité des cônes rationnels LULT(k).

Dans la quatrième section, nous étudions le rang d'un LULT-langage L qui est égal à k si L appartient à LULT$(k)\backslash$LULT$(k - 1)$ et nous montrons, qu'à condition d'avoir des alphabets disjoints, on peut calculer, par exemple, le rang de $L[c] = \{xc^n/x \in L,\ n = l(x)\}$ ($l(x)$ désigne la longueur du mot x), du produit L_1L_2 et de $\langle LcL \rangle = \{a^n xcyb^n/n \geqslant 0,\ x, y \in L\}$. On en déduit, en particulier, que pour tout $k \in \mathbb{N}_+$, il existe un langage algébrique ultralinéaire qui est un LULT-langage de rang k. L'introduction de la notion de langage sans insertion qui est un *CIL*-langage particulier (cf. Latteux, 1977 a) vérifiant: pour tout langage sans insertion L et tout cône rationnel $\mathscr{L}$ clos par union, $L \notin \mathscr{L}$ implique $L \notin \mathscr{F}_\sigma(\mathscr{L})$, la plus petite FAL close par substitution et contenant $\mathscr{L}$, permet de montrer que pour tout LULT-langage L, $\mathscr{F}_\sigma(L)$ est inclus strictement dans LULT et $\mathscr{C}(L)$, le plus petit cône rationnel contenant L n'est pas clos par substitution, ce qui implique que LULT ne contient aucun générateur des algébriques.

La section cinq est réservée au calcul du rang de la substitution marquée d'un LULT-langage L_1 dans un LULT-langage L_2, ces deux langages étant définis sur des alphabets disjoints.

Dans la section six, nous étudions les k-EDT0L-systèmes linéaires qui sont des k-EDT0L-systèmes ultralinéaires vérifiant: tout mot se dérivant à partir d'une lettre non-terminale contient au plus une occurrence d'un non-terminal. La plupart des résultats des sections I et II restent valables pour les EDT0L-systèmes linéaires (forme normale, système libre). Nous obtenons pour la famille de langages correspondante, notée LIL, des résultats analogues à ceux de la section IV. Ceci nous permet, en remarquant que LIL n'est autre que le plus petit cône rationnel clos par replication, de retrouver immédiatement des propriétés obtenues dans Ginsburg et Spanier (1971) et dans Greibach (1972).

Dans la septième section, suivant l'idée de Nivat (1975) nous associons à la famille LULT(k), l'opérateur de substitution dans LULT(k) qui est noté $\underline{\mathrm{LULT}(k)}$ et nous étudions, pour tout cône rationnel clos par union $\mathscr{L}$,les rapports entre $\mathscr{L}\underline{\mathrm{LULT}(k)}$ et $\mathscr{L}\underline{\mathrm{LULT}(k+1)}$. Nous montrons, par exemple, que si $\mathscr{L}\underline{\mathrm{LULT}(2k)}$ contient le produit de deux langages définis sur des alphabets disjoints, l'un des deux appartient à $\mathscr{L}\underline{\mathrm{LULT}(2k-1)}$. En particulier si $k = 1$, comme $\mathrm{LULT}(2) = \mathrm{Lin}$, la famille des langages algébriques linéaires et $\mathrm{LULT}(1) = \mathrm{Rat}$, la famille des langages rationnels, on retrouve une propriétée démontrée par Jacob (1975). Nous montrons, aussi, que pour tout langage $L \subseteq T^*$ avec $T \cap \{a_1, ..., a_{k+1}\} = \varnothing$, $\langle L\rangle_k = \{a_1{}^n x a_2{}^n \cdots a_{k+1}^n / n \geqslant 0, x \in L\} \in \mathscr{L}\underline{\mathrm{LULT}(k)}$ implique $\langle L\rangle_k \in \mathscr{L}$. Ainsi, en prenant $k = 1$, on précise un résultat de Boasson, Crestin et Nivat (1973). Nous pouvons, alors, en déduire que les opérateurs $\underline{\mathrm{LULT}(k)}$ forment une hiérarchie d'opérateurs très stricte en ce sens que pour tout cône rationnel clos par union $\mathscr{L} \neq \mathscr{L}\underline{\mathrm{LULT}}$, il existe un entier k_0 tel que $\mathscr{L} = \mathscr{L}\underline{\mathrm{LULT}(k_0)}$ et pour $k \geqslant k_0$, $\mathscr{L}\underline{\mathrm{LULT}(k)} \subsetneq \mathscr{L}\underline{\mathrm{LULT}(k+1)}$.

Dans la dernière section, c'est aux EDT0L-systèmes linéaires que nous associons les opérateurs de k-crochet qui consistent à faire, dans l'ensemble de tous les mots dérivés à partir de l'axiome d'un EDT0L-système linéaire, une substitution qui laisse inchangées les lettres terminales. Comme dans la section précédente, nous étudions l'application de ces opérateurs à des cônes rationnels clos par union et nous montrons que les opérateurs de k-crochet forment aussi une hiérarchie très stricte d'opérateurs unaires.

Il faut remarquer, enfin, que certains des résultats démontrés dans cet article ont été obtenus simultanément par Greibach (1978) et que ce travail a été poursuivi dans Latteux (1977c).

I. Forme normale

Nous prendrons, dans ce papier, un formalisme nouveau pour parler des EDT0L-systèmes, afin de pouvoir écrire plus facilement certaines démonstrations.

Définition. Un EDT0L-système est un 5-uplet $G = (N, T, R, \phi, \omega)$ où:

— N et T sont respectivement l'alphabet non-terminal et l'alphabet terminal avec $N \cap T = \varnothing$. On posera $V = N \cup T$.

— R est l'alphabet des régles.

— ω, l'axiome $\in N^+$.

— ϕ est une application de R dans l'ensemble des homomorphismes de V^* dans V^* dont la restriction à T est l'identité. Comme cet ensemble est un monoïde, on peut étendre ϕ à R^* par homomorphisme. Pour tout $\alpha \in R^*$ et tout $x \in V^*$, on notera $x\,\phi(\alpha)$ l'image du mot x par $\phi(\alpha)$. L'application ϕ vérifie alors:

i) $\forall x \in V^*, \forall \alpha_1, \alpha_2 \in R^*, x\phi(\alpha_1\alpha_2) = (x\phi(\alpha_1))\,\phi(\alpha_2)$,

ii) $\forall x, y \in V^*, \forall \alpha \in R^*, (xy)\,\phi(\alpha) = x\phi(\alpha)\,y\phi(\alpha)$,

iii) $\forall w \in T^*, \forall \alpha \in R^*, w\phi(\alpha) = w$.

L'ensemble de tous les mots "dérivable dans G" à partir de l'axiome, c'est-à-dire l'ensemble $\{\omega\phi(\alpha)/\alpha \in R^*\}$ sera noté $S(G)$ et le langage engendré par le système G, $L(G)$ est égal à $S(G) \cap T^*$.

Comme pour les grammaires, on peut définir les EDT0L-systèmes réduits (cf. Latteux, 1974).

DÉFINITION. Un EDT0L-système $G = (N, T, R, \phi, \omega)$ est réduit si $\forall B \in N$, $\exists x, y \in V^*$ tels que $xBy \in S(G)$ et $L(G) \neq \varnothing$ implique $\forall z \in S(G), \exists \alpha \in R^*$ tel que $z\phi(\alpha) \in T^*$.

DÉFINITION. Un EDT0L-système $G = (N, T, R, \phi, \omega)$ est un k-EDT0L-système ultralinéaire si pour tout $z \in S(G)$, le nombre d'occurrences de non-terminaux dans z, noté $l_N(z)$ est inférieur ou égal à k.

Remarque. Par la suite, quand nous aurons à construire explicitement un k-EDT0L-système ultralinéaire $G = (N, T, R, \phi, \omega)$, $\forall X \in N$, $\forall d \in R$, nous supposerons $X\phi(d) = X$, si $X\phi(d)$ n'a pas encore été défini autrement.

Nous allons, maintenant, définir pour les k-EDT0L-systèmes ultralinéaires une forme normale très restrictive, mais qui permet de mieux comprendre la structure de ces systèmes et que nous utiliserons tout au long de ce papier.

DÉFINITION. Un k-EDT0L-système ultralinéaire $G = (N, T, R, \phi, \omega)$ est sous forme normale et nous dirons que G est k-EDT0L-système u.s.f.n. si:

1. Il existe un alphabet M tel que $N = M \times \{1,..., k\}$. Pour tout $B \in M$, $\bar{B}$ désignera $(B, 1) \cdots (B, k)$.

2. Pour tout $d \in R$, il existe un et un seul $B \in M$, noté $ntg(d)$ tel que $\phi(d)$ soit l'homomorphisme identique sur $(M \backslash B) \times \{1,..., k\}$. De plus si $\bar{B}\phi(d) \notin T^*$, il existe $C \in M$, noté $ntd(d)$ tel que $\bar{B}\phi(d) = x_1(C, 1) \cdots x_k(C, k)\,x_{k+1}$ avec $x_1 \cdots x_{k+1} \in T^*$.

3. Il existe $A \in M$ tel que $\omega = \bar{A}$.

4. Soit $d \in R$ avec $B = ntg(d)$. L'une des trois propriétés suivantes est vérifiée:

a) Pour tout $i \in \{1,..., k\}$, $(B, i)\, \phi(d) = 1$ (1 désigne le mot vide). On dira que d est une *règle terminale.*

b) Pour tout $i \in \{1,..., k\}$, $(B, i)\, \phi(d) \in T^*NT^*$. On dira que d est une *règle linéaire.*

c) La règle d n'est pas linéaire et il existe $C \in M$ tel que $\bar{B}\phi(d) = \bar{C}$. On dira que d est une *règle de transition.*

Il est, alors, clair que $y \in S(G)\backslash T^*$ se factorise en $x_1(B, 1) \cdots x_k(B, k)\, x_{k+1}$ avec $x_1 \cdots x_{k+1} \in T^*$. Nous noterons alors $B = nt(y)$.

PROPOSITION I.1. *Pour tout* k-EDT0L-*système ultralinéaire avec* $k \in \mathbb{N}_+$, *on peut construire un* k-EDT0L-*système réduit u.s.f.n. qui engendre le même langage.*

Démonstration. Soient $G = (N, T, R, \phi, \omega)$ un k-EDT0L-système ultralinéaire tel que $L(G) \neq \varnothing$ et h l'homomorphisme défini sur $V = N \cup T$ par $h(X) = X$ si $X \in N$, 1 sinon. Construisons d'abord un k-EDT0L-système ultralinéaire équivalent et vérifiant les propriétés 1, 2 et 3 de la forme normale. L'ensemble $M' = h(S(G)\backslash T^*)$ est fini et effectivement constructible. Posons $N' = M' \times \{1,..., k\}$, $\omega' = (\omega, 1) \cdots (\omega, k)$ et $R' = M' \times R$. Prenons $d' = (y, d) \in R'$ où $y = B_1 \cdots B_t$ avec $B_i \in N$, $\forall i \in \{1,..., t\}$. L'homomorphisme $\phi'(d')$ est défini sur $V' = N' \cup T$ de la manière suivante:

Pour $i \in \{1,..., t\}$, posons $u_i = B_i\phi(d)$, $z = h(u_1 \cdots u_t)$ et distinguons deux cas:

a) si $z = 1$, alors posons $(y, i)\, \phi'(d') = u_i$ si $1 \leqslant i \leqslant t$, 1 si $t < i \leqslant k$.

b) Si $z \neq 1$, alors posons, $\forall i \in \{i,..., t\}$,

$l_i = l(h(u_1 \cdots u_{i-1}))$ où $l(x)$ désigne la longueur du mot x. Pour tout $i \in \{1,..., t\}$, u_i peut s'écrire $x_{i,0}D_{i,1} \cdots x_{i,s-1}D_{i,s}x_{i,s}$ avec $D_{i,1} \cdots D_{i,s} \in N^+$ et $x_{i,0} \cdots x_{i,s} \in T^*$ et on pose $u_i' = x_{i,0}(z, 1 + l_i) \cdots x_{i,s-1}(z, s + l_i)\, x_{i,s}$ et $(y, i)\, \phi'(d') = u_i'$ si $1 \leqslant i < t$, $u_t'(z, 1 + l(z)) \cdots (z, k)$ si $i = t$, 1 si $t < i \leqslant k$.

Il est clair que le système $G' = (N', T, R', \phi', \omega')$ vérifie les trois premières propriétés de la forme normale. Il reste à montrer que $L(G') = L(G)$. Ceci se déduit immédiatement des deux propriétés suivantes qui se démontrent aisément par récurrence:

(*) S'il existe $\alpha \in R^*$ tel que $\omega\phi(\alpha) = x_0D_1 \cdots x_{s-1}D_sx_s$ avec $D_1 \cdots D_s \in N^+$ et $x_0 \cdots x_s \in T^*$, alors il existe $\alpha' \in R'^*$ tel que $\omega'\phi'(\alpha') = x_0(z, 1) \cdots x_{s-1}(z, s)\, x_s'(z, s + 1) \cdots (z, k)\, x_k'$ avec $z = D_1 \cdots D_s$ et $x_s' \cdots x_k' = x_s$.

(**) S'il existe $\alpha' \in R'^*$ tel que $\omega'\varphi'(\alpha') = z' \notin T^*$, alors il existe $z = D_1 \cdots D_t$ avec $D_1, ..., D_t \in N$, $x_0, ..., x_k \in T^*$ et $\alpha \in R^*$ tels que $z' = x_0(z, 1) \cdots (z, k)\, x_k$ et $\omega\phi(\alpha) = x_0D_1 \cdots x_{t-1}D_tx_t \cdots x_k$.

Supposons, maintenant, que G vérifie les propriétés 1, 2 et 3 de la forme normale avec $N = M \times \{1,..., k\}$. Prenons $R_1 = \{d \in R/\bar{B}\phi(d) \in T^*$ avec $B = ntg(d)\}$, $R_2 = R \backslash R_1$, $R_2' = \{d'/d \in R_2\}$ et $R_2'' = \{d''/d \in R_2\}$ de telle façon que R, R_2', R_2'' soient disjoints deux à deux. Soient f et F deux nouveaux symboles, posons $R' = R \cup R_2' \cup R_2'' \cup \{f\}$, $M' = M \cup \{F\} \cup M \times R_2 \cup M \times R_2'$ et $N' = M' \times \{1,..., k\}$. Définissons l'application ϕ' de la manière suivante:

Soit $d \in R_1$ avec $B = ntg(d)$ et $\forall i \in \{1,..., k\}$, $(B, i)\, \phi(d) = u_i \in T^*$. Alors $(B, 1)\, \phi'(d) = (F, 1)u_1$ et $\forall i \in \{2,..., k\}$, $(B, i)\, \phi'(d) = u_i(F, i)$.

Soit $d \in R_2$ avec $B = ntg(d)$ et $\forall i \in \{1,..., k\}$, $(B, i)\, \phi(d) = u_i = u_i' u_i''$ avec $u_i' \in T^*$, $u_i'' \in \{1\} \cup NV^*$. Alors, $\forall i \in \{1,..., k\}$, $(B, i)\, \phi'(d) = u_i'((B, d), i)$, $((B, d), i)\, \phi'(d') = ((D, d'), l_i + 1) \cdots ((D, d'), l_{i+1})$ avec $D = ntd(d)$ et $l_i = l(h(u_1 \cdots u_{i-1}))$ et $((D, d'), i)\, \phi'(d'') = (D, i)\, v_i$ où $v_i \in T^*$ est défini par: $\exists j \in \{1,..., k\}$ tel que $u_j = z_j(D, i)\, v_i z_j'$ avec $z_j' \in \{1\} \cup NV^*$.

Pour tout $i \in \{1,..., k\}$, nous poserons $(F, i)\, \phi'(f) = 1$.

Par construction, le k-EDT0L-système ultralinéaire $G' = (N', T, R', \phi', \omega)$ est sous forme normale et il est clair que $L(G') = L(G)$. Pour le réduire, il suffit de considérer $M'' = \{B \in M'/\exists \alpha_1', \alpha_2' \in R'^*$ tels que $\omega\phi'(\alpha_1') = u_1(B, 1)\, u_2$ et $\omega\phi'(\alpha_1'\alpha_2') \in T^*\}$, $N'' = M'' \times \{1,..., k\}$, $V'' = N'' \cup T$, $R'' = \{d' \in R'/ntg(d') \in M''$ et d' est une règle terminale de $G'\} \cup \{d'$ règle non terminale de $G'/ntg(d')$ et $ntd(d') \in M''\}$ et de définir ϕ'' sur R'', en prenant, $\forall d'' \in R''$, pour $\phi''(d'')$ la restriction à V''^* de l'homomorphisme $\phi'(d'')$. Il est, alors, facile de vérifier que $G'' = (N'', T, R'', \phi'', \omega)$ est un k-EDT0L-système u.s.f.n. réduit équivalent à G. ▌

Il est clair que tout k-EDT0L-système u.s.f.n. peut être considérée comme une grammaire "absolutely parallel". Réciproquement, pour toute grammaire "absolutely parallel" sous forme indexée (cf. Rajlich, 1972), on peut effectivement construire un k-EDT0L-système ultralinéaire équivalent, donc:

PROPOSITION I.2. *La famille des langages engendrés par des k-EDT0L-systèmes ultralinéaires, notée* LULT *est égale à la famille des "absolutely parallel languages"*.

Cette famille est un cône rationnel clos par substitution (Rajlich, 1972, Rozenberg et Vermeir, 1978). Montrons qu'elle est, aussi, close par intercalation finie, une opération définie dans Greibach (1972). Soient L_1, L_2 deux langages inclus dans T^*, notons:

$$\mathrm{Dup}(L_1, L_2) = \{xyxy/x \in L_1, y \in L_2\},$$

$$I_k(L_1, L_2) = \{x_1 y_1 \cdots y_k x_{k+1}/x_i, y_i \in T^*, x_1 \cdots x_{k+1} \in L_1, y_1 \cdots y_k \in L_2\}.$$

DÉFINITION. Un cône rationnel $\mathscr{L}$ est clos par *duplication* (*k-intercalation*) si $\forall L_1, L_2 \in \mathscr{L}$, $\mathrm{Dup}(L_1, L_2) \in \mathscr{L}(I_k(L_1, L_2) \in \mathscr{L})$. Si $\forall k \in \mathbb{N}_+$, $\mathscr{L}$ est clos par k-intercalation nous dirons que $\mathscr{L}$ est clos par *intercalation finie*.

PROPOSITION I.3. *Tout cône rationnel clos par duplication est clos par intercalation finie.*

Démonstration. Soient $\mathscr{L}$ un cône rationnel clos par duplication, L_1, L_2 inclus dans T^*, deux langages de $\mathscr{L}$ et $c_1,..., c_{k+1}$, $d_1,..., d_k$ des nouveaux symboles. Les langages $L_1' = \{x_1c_1 \cdots x_{k+1}c_{k+1}/x_i \in T^*, \forall i \in \{1,..., k+1\}$ et $x_1 \cdots x_{k+1} \in L_1\}$ et $L_2' = \{y_1d_1 \cdots y_kd_k/y_i \in T^*, \forall i \in \{1,..., k\}$ et $y_1 \cdots y_k \in L_2\}$ appartiennent à $\mathscr{L}$. Comme $\mathscr{L}$ est clos par duplication, $L' = \{(x'y')^{k+1}/x' \in L_1'$, $y' \in L_2'\} \in \mathscr{L}$. Il est, alors, facile de trouver une transduction rationnelle τ telle que $I_k(L_1, L_2) = \tau(L') \in \mathscr{L}$. ∎

Pour tout langage L appartenant à la famille LULT, $L' = \{xx/x \in L\} \in$ LULT (il suffit de remplacer, dans le système qui engendre L, l'axiome ω par $\omega\omega$). Comme LULT est clos par produit, nous en déduisons que LULT est clos par duplication et la proposition précédente implique:

COROLLAIRE I.4. LULT *est un cône rationnel clos par substitution et intercalation finie.*

Soient un alphabet $T = \{a_1,..., a_k\}$, $\mathbb{N}_+$ l'ensemble des entiers positifs et $\mathbb{N} = \mathbb{N}_+ \cup \{0\}$. La fonction de Parikh sur T, notée ψ_T est l'homomorphisme canonique de T^* dans $\mathbb{N}^k$ isomorphe au monoïde commutatif libre engendré par T. Un ensemble $S \subseteq \mathbb{N}^k$ est *linéaire* s'il existe $x_0, x_1,..., x_n \in \mathbb{N}^k$ tels que $S = \{x_0 + \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j/\lambda_j \in \mathbb{N}\}$. Un ensemble *semilinéaire* est une union finie d'ensembles linéaires inlus dans $\mathbb{N}^k$. Pour tout ensemble linéaire $S \subseteq \mathbb{N}^k$, il est facile de construire un k-EDT0L-système ultralinéaire qui engendre le le langage $L = \{w \in a_1^* \cdots a_k^*/\psi_T(w) \in S\}$, donc pour tout semilinéaire $S' \subseteq \mathbb{N}^k$, $L' = \psi_T^{-1}(S') \cap a_1^* \cdots a_k^*$ appartient à LULT. En utilisant le fait que tout langage $L \in$ LULT à pour image par la fonction de Parikh un semilinéaire (Rozenberg et Vermeir, 1978) ainsi que les résultats de Latteux (1976), nous obtenons alors:

PROPOSITION I.5. *Soit L un langage borné ($L \subseteq w_1^* \cdots w_t^*$ où $w_1,..., w_t$ sont des mots quelconques). Les trois propriétés suivantes sont équivalentes:*

i) $L \in$ LULT,

ii) *L est une intersection finie de langages algébriques bornés,*

iii) *L est l'image homomorphe de l'intersection de deux langages algébriques bornés.*

II. EDT0L-SYSTÈMES ULTRALINÉAIRES LIBRES

Pour tout $k \in \mathbb{N}_+$, nous noterons LULT($2k$), la famille des langages engendrés par des k-EDT0L-systèmes ultralinéaires. Tout 1-EDT0L-système ultralinéaire peut être considéré comme une grammaire linéaire, donc LULT(2) est égal à Lin, la famille des langages algébriques linéaires. Or, pour tout $L \in$ Lin, $L \subseteq T^*$ avec $c \notin T$, le langage $L\,c\,L \in$ Lin si et seulement si $L \in$ Rat, la famille des langages rationnels. De la même façon, si nous prenons $L \in$ LULT($2k$), $L \subseteq T^*$ avec $c \notin T$, dans certains cas, $L\,c\,L$ appartient à LULT($2k$) et dans d'autres $L\,c\,L \in$ LULT($2k + 2$)\LULT($2k$) (cf. section IV). Pour clarifier ce fait, introduisons la notion de EDT0L-système ultralinéaire libre dans lequel, grosso modo, un non terminal reste "libre" pour une utilisation ultérieure.

Définition. Un k-EDT0L-système ultralinéaire $G = (N, T, R, \phi, \omega)$ est *libre* (resp. *libre à droite*, *libre à gauche*, *libre à droite et à gauche*) si $S(G)\backslash T^*$ est inclus dans $NV^* \cup V^*N$ (resp. V^*N, NV^*, NV^*N) où V est égal à $N \cup T$.

Pour tout entier positif k, LULT($2k - 1$) désignera la famille des langages engendrés par des k-EDT0L-systèmes ultralinéaires libres. Il est clair, par exemple, que LULT(1) $=$ Rat. Comparons, maintenant, la puissance générative des divers types de liberté.

Lemme II.1. *Pour tout k-EDT0L-système ultralinéaire libre à droite (gauche), il existe un k-EDT0L-système u.s.f.n. libre à gauche (droite) équivalent.*

Démonstration. Soit $G = (N, T, R, \phi, \omega)$ un k-EDT0L-système ultralinéaire libre à droite. Comme les différentes constructions de la proposition I.1 ne modifient en rien la liberté du système, nous pouvons supposer que G est sous forme normale, réduit avec $N = M \times \{1,..., k\}$. Posons $M' = M \cup \{A'\}$, $R' = R \cup \{f\}$ où A' et f sont des nouveaux symboles, $N' = M' \times \{1,..., k\}$, $\omega' = (A', 1) \cdots (A', k)$ et $V' = N' \cup T$. Définissons l'application ϕ_g sur R' de la manière suivante:

Soit $d \in R$, une règle linéaire de G avec $B = ntg(d)$, $C = ntd(d)$ et $\forall i \in \{1,..., k\}$, $(B, i)\,\phi(d) = u_i(C, i)\,v_i$. Comme G est réduit et libre à droite, il est clair que $v_k = 1$ et nous poserons, $\forall i \in \{1,..., k\}$, $(C, i)\,\phi_g(d) = v_{i-1}(B, i)\,u_i$ avec $v_0 = 1$.

Soit $d \in R$, une règle de transition de G, avec $B = ntg(d)$ et $C = ntd(d)$. Il existe des entiers positifs $i_1 < i_2 < \cdots < i_t$ et $1 = j_1 < j_2 < \cdots < j_{t+1} = k + 1$ tels que $\forall_s \in \{1,..., t\}$, $(B, i_s)\,\phi(d) = (C, j_s) \cdots (C, j_{s+1} - 1)$ et $\forall q \in \{1,..., k\}\backslash\{i_1,..., i_t\}$, $(B, q)\,\phi(d) = 1$. Nous poserons, alors, $(C, q)\,\phi_g(d) = 1$, $\forall q \in \{1,..., k\}\backslash\{j_1,..., j_t\}$ et $\forall s \in \{1,..., t\}$, $(C, j_s)\,\phi_g(d) = (B, i_{s-1} + 1) \cdots (B, i'_s)$ avec $i_0 = 0$ et $i'_s = i_s$ si $s < t$, k si $s = t$.

Soit d'une règle terminale de G avec $B = ntg(d)$. Alors, $\forall i \in \{1,..., k\}$, $(A', i)\,\phi_g(d) = (B, i)$.

Enfin, $\forall i \in \{1,..., k\}$, $(A, i)\,\phi_g(f) = 1$.

Par construction, $G' = (N', T, R', \phi_g, \omega')$ est un k-EDT0L-système u.s.f.n. libre à gauche. Montrons que $L(G') = L(G)$. Pour ce faire, établissons d'abord la propriété:

(*) si $x_1(C, 1) \cdots x_k(C, k) = \omega\phi(\alpha)$ avec $\alpha \in R^*$, $C \in M$ et $x_1 \cdots x_k \in T^*$, alors $\forall i \in \{1,..., k\}$, $(C, i)\, \phi_g(\alpha^R f) = x_i$ (α^R désigne l'image miroir de α).

Raisonnons par récurrence sur la longueur de α.

Si $l(\alpha) = 0$, $\forall i \in \{1,..., k\}$, $(C, i) = (A, i)$ et $x_i = 1$. On a bien $(A, i)\, \phi_g(f) = 1$.

Prenons, maintenant, $\alpha = \alpha_1 d$ avec $\alpha_1 \in R^*$, $d \in R$ et $\omega\phi(\alpha_1) = x_1'(B, 1) \cdots x_k'(B, k)$. Si $ntg(d) \neq B$, $\omega\phi(\alpha_1 d) = \omega\phi(\alpha_1)$ et nous pouvons utiliser l'hypothèse de récurrence. Si $ntg(d) = B$, distinguons deux cas:

1. d est une règle linéaire de G telle que $ntd(d) = C$ et $\forall i \in \{1,..., k\}$, $(B, i)\, \phi(d) = u_i(C, i)\, v_i$ avec $v_k = 1$. Donc $\omega\phi(\alpha_1 d) = x_1' u_1(C, 1)\, v_1 x_2' u_2 \cdots v_{k-1} x_k' u_k(C, k)$. Pour tout $i \in \{1,..., k\}$, nous avons, d'après l'hypothèse de récurrence, $(B, i)\, \phi_g(\alpha_1{}^R f) = x_i'$ et par construction, $(C, i)\, \phi_g(d) = v_{i-1}(B, i)\, u_i$ avec $v_0 = 1$. Donc, $\forall i \in \{1,..., k\}$, $(C, i)\, \phi_g(\alpha^R f) = (C, i)\, \phi_g(d\alpha_1{}^R f) = v_{i-1} x_i' u_i$.

2. d est une règle de transition de G avec $ntd(d) = C$. Soient $i_1, ..., i_t$, $j_1, ..., j_{t+1}$, les entiers positifs définis pour la construction de $\phi_g(d)$. Nous avons, alors $\omega\phi(\alpha_1 d) = x_1' \cdots x_{i_1}'(C, j_1) \cdots (C, j_2 - 1)\, x_{i_1+1}' \cdots x_{i_2}'(C, j_2) \cdots (C, j_3 - 1) \cdots x_k'(C, j_t) \cdots (C, k)$ et $\forall q \in \{1,..., k\} \backslash \{j_1, ..., j_t\}$, $(C, q)\, \phi_g(d) = 1$ donc $(C, q)\, \phi_g(d\alpha_1{}^R f) = 1$. De même, $\forall s \in \{1,..., t\}$, $(C, j_s)\, \phi_g(d) = (B, i_{s-1} + 1) \cdots (B, i_s')$ avec $i_0 = 0$, $i_s' = i_s$ si $s < t$, k si $s = t$. On obtient, en utilisant l'hypothèse de récurrence, $\forall s \in \{1,..., t\}$, $(C, j_s)\, \phi_g(d\alpha_1{}^R f) = x_{i_{s-1}+1}' \cdots x_{i_s'}'$ ce qui termine la démonstration de la propriété (*). On démontrerait par un raisonnement analogue la propriété:

(**) Si $(B, 1)\, y_1 \cdots (B, k)\, y_k = \omega'\phi_g(\alpha)$ avec $\alpha \in R^+$, $B \in M$ et $y_1 \cdots y_k \in T^*$, alors $\forall i \in \{1,..., k\}$, $(B, i)\, \phi(\alpha^R) = y_i$.

Prenons, maintenant, $x \in L(G)$. Il existe une factorisation de x en $x_1 \cdots x_k$, $\alpha \in R^*$ et une règle terminale d avec $ntg(d) = C$ tels que $\omega\phi(\alpha) = x_1(C, 1) \cdots x_k(C, k)$. D'après la propriété (*), $((C, 1) \cdots (C, k))\, \phi_g(\alpha^R f) = x_1 \cdots x_k = x$ et comme $\omega'\phi_g(d) = (C, 1) \cdots (C, k)$, $x = \omega'\phi_g(d\alpha^R f) \in L(G')$. Réciproquement, prenons $y \in L(G')$. Il existe, alors, $y_1, ..., y_k \in T^*$ et $\alpha \in R^*$ tels que $\omega'\phi_g(\alpha) = (A, 1)\, y_1 \cdots (A, k)\, y_k$ avec $y = y_1 \cdots y_k$ et d'après la propriété (**), $y = y_1 \cdots y_k = \omega\phi(\alpha^R) \in L(G)$. ▌

Pour tout k-EDT0L-système ultralinéaire $G = (N, T, R, \phi, \omega)$ avec $V = N \cup T$, nous noterons:

$$L_d(G) = \{w \in T^* / \exists z \in S(G) \cap V^*N \text{ et } d_1 \in R \text{ tels que } w = z\phi(d_1)\},$$
$$L_g(G) = \{w \in T^* / \exists z \in S(G) \cap NV^* \text{ et } d_1 \in R \text{ tels que } w = z\phi(d_1)\},$$
$$L_{dg}(G) = \{w \in T^* / \exists z \in S(G) \cap NV^*N \text{ et } d_1 \in R \text{ tels que } w = z\phi(d_1)\}.$$

Lemme II.2. *Pour tout k-EDT0L-système ultralinéaire $G = (N, T, R, \phi, \omega)$, il existe un k-EDT0L-système u.s.f.n. G' libre à droite (gauche) tel que $L(G') = L_d(G)$ (resp. $L_g(G)$).*

Démonstration. On peut supposer, sans nuire à la généralité de la démonstration que G est sous forme normale avec $V = N \cup T$, $N = M \times \{1,..., k\}$ et $A = nt(\omega)$. Nous noterons R_1, R_2, R_3, respectivement, l'ensemble des règles terminales, linéaires, de transition du système G. Posons $M' = \{1,..., k\} \times M$, $N' = M' \times \{1,..., k\}$, $R_1' = R_1 \times \{1,..., k\}$, $R_2' = \{(d, j) \in R_2 \times \{1,..., k\}/ (B, k)\, \phi(d) \in T^*N$ où $B = ntg(d)\}$, $R_3' = \{(d, j) \in R_3 \times \{1,..., k\}/((B, j) \cdots (B, k))\, \phi(d) \in N^+$ où $B = ntg(d)\}$, $R' = R_1' \cup R_2' \cup R_3'$, $\omega' = (1, A, 1) \cdots (1, A, k)$ et considérons le k-EDT0L-système u.s.f.n. $G' = (N', T, R', \phi', \omega')$ où l'application ϕ' est définie de la manière suivante:

— Soit $(d, i) \in R_1'$ avec $B = ntg(d)$. Alors, $\forall j \in \{1,..., k\}$, $(i, B, j)\, \phi'(d, i) = 1$.

— Soit $(d, i) \in R_2'$ avec $B = ntg(d)$, $C = ntd(d)$ et $\forall j \in \{1,..., k\}$, $(B, j)\, \phi(d) = u_j(C, j)\, v_j$. Alors, $\forall j \in \{1,..., k\}$, on pose $(i, B, j)\, \phi'(d, i) = u_j(i', C, j)\, v_j$ avec $i' = \sup(i, s)$ où s est le plus petit t tel que $v_t u_{t+1} \cdots v_k = 1$.

— Soit $(d, i) \in R_3'$ avec $B = ntg(d)$ et $C = ntd(d)$. Posons $i' = l(((B, 1) \cdots (B, i-1))\, \phi(d)) + 1$ et et $\forall j \in \{1,..., k\}$, $(i, B, j)\, \phi'(d, i) = h((B, j)\, \phi(d))$ où h est l'homomorphisme défini sur $\{C\} \times \{1,..., k\}$ par $h(C, q) = (i', C, q)$, $\forall q \in \{1,..., k\}$.

Par construction, G' est un k-EDT0L-système u.s.f.n. libre à droite. L'égalité $L(G') = L_d(G)$ se déduit immédiatement des deux propriétés suivantes qui se démontrent aisément par récurrence:

a) si $x_1(C, 1) \cdots x_k(C, k) \in S(G)$, alors $x_1(i', C, 1) \cdots x_k(i', C, k) \in S(G')$ avec i' = le plus petit entier positif i tel que $x_{i+1} \cdots x_k = 1$.

b) Tout $z \in S(G') \backslash T^*$ se factorise en $x_1(i', C, 1) \cdots x_k(i', C, k)$ avec $x_{i'+1} \cdots x_k = 1$. Alors, $x_1(C, 1) \cdots x_{i'}(C, i') \cdots (C, k) \in S(G)$. ∎

Nous pouvons en déduire:

PROPOSITION II.3. *Pour tout k-EDT0L-système ultralinéaire G, il existe un k-EDT0L-système u.s.f.n. G' libre à droite (gauche) tel que $L(G') = L_d(G) \cup L_g(G)$.*

Démonstration. D'après le lemme précédent, il existe deux k-EDT0L-systèmes u.s.f.n. G_1, libre à droite et G_2 libre à gauche, tels que $L(G_1) = L_d(G)$ et $L(G_2) = L_g(G)$. Et, d'après le lemme II.1, il existe un k-EDT0L-système u.s.f.n. libre à droite G_2' tel que $L(G_2') = L(G_2)$. Il est alors facile de construire un k-EDT0L-système u.s.f.n. libre à droite G' qui engendre $L(G_1) \cup L(G_2) = L_d(G) \cup L_g(G)$. ∎

En particulier, si le système G est libre, nous avons $L(G) = L_d(G) \cup L_g(G)$ et donc:

COROLLAIRE II.4. *Pour tout k-EDT0L-système ultralinéaire libre G, il existe un k-EDT0L-système u.s.f.n. libre à droite (gauche) qui engendre le même langage.*

Etablissons, maintenant, une relation entre les k-EDT0L-systèmes ultralinéaires et les $k+1$-EDT0L-systèmes ultralinéaires libres à gauche et à droite, qui nous sera d'une grande utilité dans les sections suivantes.

PROPOSITION II.5. *Pour tout k-EDT0L-système ultralinéaire, il existe un $k+1$-EDT0L-système u.s.f.n. libre à droite et à gauche équivalent.*

Démonstration. Soit $G = (N, T, R, \phi, \omega)$ un k-EDT0L-système ultralinéaire. D'après la proposition I.1, on peut supposer que G est sous forme normale avec $N = M \times \{1,..., k\}$, $V = N \cup T$ et $nt(\omega) = A$. Considérons le $k+1$-EDT0L-système u.s.f.n. $G' = (N', T, R, \phi', \omega')$ défini en prenant $N' = M \times \{1,..., k+1\}$, $V' = N' \cup T$, $\omega' = \omega(A, k+1)$ et où pour tout $d \in R$ et tout $x \in V'$, $x\phi'(d) = x\phi(d)$ si $x \in V$, si $x \in V' \backslash V$. Le système G' est libre à droite donc le $k+1$-EDT0L-système u.s.f.n. obtenu à partir de G' en utilisant la construction du lemme II.1 est à la fois libre à gauche et équivalent à G' donc à G. De plus, par construction de G', G'' reste encore libre à droite. ▮

Montrons la réciproque de cette proposition.

LEMME II.6. *Pour tout k-EDT0L-système ultralinéaire G, avec $k \geqslant 2$, il existe un k-EDT0L-système u.s.f.n., G'', libre à droite et à gauche tel que $L(G'') = L_{dg}(G)$.*

Démonstration. Soit $G = (N, T, R, \phi, \omega)$ un k-EDT0L-système ultralinéaire que l'on peut supposer sous forme normale. Il est facile de montrer que le k-EDT0L-système u.s.f.n. G', équivalent à G, construit à partir de G dans la démonstration du lemme II.2 vérifie $L_g(G') = L_{dg}(G)$. En utilisant une nouvelle fois ce lemme, mais cette fois pour construire un système libre à gauche, on obtient un k-EDT0L-système u.s.f.n. libre à gauche G'', tel que $L(G'') = L_g(G')$ et qui est aussi libre à droite comme G'. ▮

PROPOSITION II.7. *Pour tout k-EDT0L-système ultralinéaire G, avec $k \geqslant 2$, il existe un $(k-1)$-EDT0L-système u.s.f.n. G'' tel que $L(G'') = L_{dg}(G)$.*

Démonstration. D'après le lemme précédent, on peut supposer que $G = (N, T, R, \phi, \omega)$ est sous forme normale, libre à droite et à gauche avec $N = M \times \{1,..., k\}$, $V = N \cup T$ et $nt(\omega) = A$. Nous pouvons, aussi, supposer que le système G vérifie la propriété:

$$(P) \text{ pour toute règle de transition } d \text{ avec } ntg(d) = B,$$

$(B, 1)\,\phi(d) \neq 1$ et $(B, k)\,\phi(d) \neq 1$.

En effet, soient i_1 et i_t respectivement, le plus petit, le plus grand i tel que $(B, i)\,\phi(d) \neq 1$. Distinguons deux cas:

— Si $i_1 = i_t$, comme G est libre à gauche et à droite, tout $z \in S(G)$ avec $nt(z) = B$ est égal à $(B, 1) \cdots (B, k)$ et $z\phi(d) = z\phi'(d)$ où $\phi'(d)$ est défini par, $\forall i \in \{1,..., k\}(B, i)\, \phi'(d) = (C, i)$ où $C = ntd(d)$.

— Si $i_1 < i_t$, tout $z \in S(G)$ avec $nt(z) = B$ se factorise en $(B, 1) \cdots (B, i_1)$ $z'(B, i_t) \cdots (B, k)$. Alors $z\phi(d) = z\phi'(d)$ où $\phi'(d)$ est défini par:

$$(B, 1)\, \phi'(d) = (B, i_1)\, \phi(d),\ (B, i_1)\, \phi'(d) = (B, 1)\, \phi(d),\ (B, k)\, \phi'(d) = (B, i_t)\, \phi(d),$$

$$(B, i_t)\, \phi'(d) = (B, k)\, \phi(d) \text{ et } \forall_j \in \{1,..., k\}\backslash\{1, i_1, i_t, k\},\ (B, j)\, \phi'(d) = (B, j)\, \phi(d).$$

Il est alors clair que le système que l'on obtiendrait en remplaçant ϕ par ϕ' dans G serait équivalent à G et vérifierait la propriété (P).

Comme G vérifie (P), le système $G' = (N', T, R', \phi_g, \omega')$ construit à partir de G dans la démonstration du lemme II.1 est tel que pour toute règle non terminale $d' \in R'$ et tout $B \in M'$, $(B, 1)\, \phi_g(d') \in N'$. On en déduit, alors, que $\forall \alpha \in R'^+$ et $\forall \omega \in T^*$, $w = \omega'\phi_g(\alpha)$ si et seulement si $w = ((A', 2) \cdots (A', k))\, \phi_g(\alpha)$. Considérons le $(k - 1)$-EDT0L-système ultralinéaire $G'' = (N'', T, R', \phi'', \omega'')$ avec $N'' = M' \times \{2,..., k\}$, $\omega'' = (A', 2) \cdots (A', k)$ et où ϕ'' est défini par: $\forall d' \in R'$, $\phi''(d')$ est la restriction de $\phi_g(d')$ à $(N'' \cup T)^*$. Il est clair que $L(G'') = L(G') = L(G)$ et la proposition I.1 implique le résultat souhaité. ▮

En particulier si nous considérons un système libre à gauche et à droite, nous obtenons:

COROLLAIRE II.8. *Pour tout k-EDT0L-système ultralinéaire libre à gauche et à droite, avec $k \geqslant 2$, il existe un $(k - 1)$-EDT0L-système u.s.f.n. équivalent.*

Etudions, maintenant, les propriétés de clôtures des familles LULT(k).

PROPOSITION II.9. *Pour tout $k \in \mathbb{N}_+$, LULT(k) est un cône rationnel fermé par union.*

Démonstration. Il est clair que LULT(k) est clos par union et par homomorphisme. On peut montrer que LULT(k) est clos par intersection avec les rationnels, de la même façon que les EDT0L-langages sont clos par intersection avec les rationnels (cf. Arnold et Dauchet, 1976, Latteux, 1974, Engelfriet, 1977). Enfin, d'après les résultats de la section V, LULT(k) est clos par substitution rationnelle marquée et comme LULT(k) est clos par homomorphisme et intersection avec les langages rationnels on en déduit que LULT(k) est clos par substitution rationnelle. Donc LULT(k) est un cône rationnel fermé par union. ▮

Rappelons la définition de cône rationnel translatable et de cône rationnel fermé par crochet. Ces deux notions, introduites dans Boasson et Nivat (1973), Boasson, Crestin et Nivat (1973), ont permis de montrer que tout générateur du cône rationnel des langages algébriques est un générateur fidèle (Boasson et Nivat, 1973) et d'établir la non-principalité de nombreux cônes rationnels (Boasson, Crestin et Nivat, 1973). Ici, elles nous servent à mettre en évidence une distinction intéressante entre LULT($2k$) et LULT($2k - 1$).

Pour $w \in \{a, b\}^*$, $\bar{w} = h(w)$ où h est l'homomorphisme défini sur $\{a, b\}^*$ par $h(a) = \bar{a}$ et $h(b) = \bar{b}$. Pour tout langage L, posons:

$$\langle L \rangle = \{a^n x b^n / n \geqslant 0, x \in L\},$$
$$(L)_2 = \{w x \bar{w}^R / w \in \{a, b\}^*, x \in L\}.$$

DÉFINITION. Un cône rationnel $\mathscr{L}$ est translatable (fermé par crochet) si pour tout langage $L \in \mathscr{L}$, $\langle L \rangle \in \mathscr{L}((L)_2 \in \mathscr{L})$.

PROPOSITION II.10. *Pour tout* $k \in \mathbb{N}_+$, LULT($2k$) *est un cône rationnel fermé par crochet (donc translatable) mais pas par produit.*

Démonstration. Soit $G = (N, T, R, \phi, \omega)$ un k-EDT0L-système ultra-ultralinéaire. Prenons A', d_1, d_2, d_3 des nouveaux symboles et posons $N' = N \cup \{A'\}$, $T' = T \cup \{a, \bar{a}, b, \bar{b}\}$, $R' = R \cup \{d_1, d_2, d_3\}$. Considérons le système $G' = (N', T', R', \phi', A')$ où ϕ' est défini sur R' par: $A'\phi'(d_1) = aA'\bar{a}$, $A'\phi'(d_2) = bA'\bar{b}$, $A'\phi'(d_3) = \omega$ et $X\phi'(d) = X\phi(d)$, $\forall d \in R$, $\forall X \in N$. Il est, alors, clair que G' est un k-EDT0L-système ultralinéaire qui engendre $(L(G))_2$. Le fait que LULT($2k$) ne soit pas clos par produit provient des résultats de la section IV. ∎

PROPOSITION II.11. *Pour tout* $k \in \mathbb{N}_+$, LULT($2k - 1$) *est une* FAL *non translatable.*

Démonstration. Soit $G = (N, T, R, \phi, \omega)$ un k-EDT0L-système u.s.f.n. libre à droite avec $N = M \times \{1,..., k\}$ tel que $L = L(G)$. Posons $R_t = \{d \in R / d$ est une règle terminale de $G\}$ et $\bar{R}_t = \{\bar{d} / d \in R_t\}$ avec $R_t \cap \bar{R}_t = \varnothing$ et $R' = R \cup \bar{R}_t$. Considérons le k-EDT0L-système ultralinéaire $G' = (N, T, R', \phi', \omega)$ où ϕ' est défini par:

i) $\forall d \in R$, $\phi'(d) = \phi(d)$,

ii) $\forall \bar{d} \in \bar{R}_t$ avec $B = ntg(d)$, $(B, i)\,\phi'(\bar{d}) = 1$ si $1 \leqslant i < k$, ω si $i = k$.

Il est clair que G' est libre à droite et engendre L^+. Donc LULT($2k - 1$) est une FAL. On montrera dans la section IV que LULT($2k - 1$) n'est pas translatable. ∎

III. PRINCIPALITÉ DES CÔNES LULT(K)

Dans cette section, nous allons montrer que, contrairement à LULT $= \bigcup_{k \geqslant 1}$ LULT(k), pour tout $k \in \mathbb{N}_+$, le cône rationnel LULT(k) est principal. Nous utiliserons les notations suivantes:

Considérons un k-EDT0L-système u.s.f.n. $G = (N, T, R, \phi, \omega)$ avec $N = M \times \{1,..., k\}$, $V = N \cup T$, $nt(\omega) = A$. Pour toute règle de transition d de G avec $ntg(d) = B$, $ntd(d) = C$, nous appelerons *type de d*, l'élément $\delta = (\delta_1, ..., \delta_{k-1}) \in \mathbb{N}^{k-1}$ qui vérifie $\forall i \in \{1,..., k-1\}$, $((B, 1) \cdots (B, i))\, \phi(d) = (C, 1) \cdots (C, \delta_i)$ et nous écrirons type$(d) = \delta$. Il est, alors, clair que $0 \leqslant \delta_1 \leqslant \cdots \leqslant \delta_{k-1} \leqslant k$ et que la règle d est caractérisée par $ntg(d)$, $ntd(d)$ et type(d). Pour tout n, $k \in \mathbb{N}_+$, posons:

$$N_k = \{S\} \times \{1,..., k\},\ \omega_k = (S, 1) \cdots (S, k),$$

$$\Delta_k = \{(\delta_1, ..., \delta_{k-1}) \in \mathbb{N}^{k-1}/0 \leqslant \delta_1 \leqslant \cdots \leqslant \delta_{k-1} \leqslant k \text{ et } \exists i \in \{1,..., k-1\},\ \delta_i \neq i\},$$

$$\Delta'_k = \{(\delta_1, ..., \delta_{k-1}) \in \Delta_k / \delta_{k-1} < k\},$$

$$T_{k,n} = \Delta_k \cup \{d_{i,j} / i \in \{1,..., n\}, j \in \{1,..., 2k\}\},$$

$$R_{k,n} = \Delta_k \cup \{d_i / i \in \{1,..., n\}\} \cup \{f\} \text{ et}$$

$$R'_{k,n} = \Delta'_k \cup \{d_i / i \in \{1,..., n\}\} \cup \{f\}.$$

Considérons les k-EDT0L-systèmes ultralinéaires $G_{k,n} = (N_k, T_{k,n}, R_{k,n}, \phi_{k,n}, \omega_k)$ et $G'_{k,n} = (N_k, T_{k,n}, R'_{k,n}, \phi'_{k,n}, \omega_k)$ où les applications $\phi_{k,n}$ et $\phi'_{k,n}$ sont définies de la manière suivante:

— Pour tout $j \in \{1,..., k\}$, $(S, j)\, \phi_{k,n}(f) = (S, j)\, \phi'_{k,n}(f) = 1$.
— Pour tout $i \in \{1,..., n\}$ et tout $j \in \{1,..., k-1\}$,

$$(S, j)\, \phi_{k,n}(d_i) = (S, j)\, \phi'_{k,n}(d_i) = d_{i,2j-1}(S, j) d_{i,2j},\ (S, k)\, \phi_{k,n}(d_i) = d_{i,2k-1}(S, k) d_{i,2k} \text{ et } (S, k)\, \phi'_{k,n}(d_i) = d_{i,2k-1}(S, k).$$

— Enfin, pour tout $\delta = (\delta_1, ..., \delta_{k-1}) \in \Delta_k$ (resp. Δ'_k), on pose, $\forall j \in \{1,..., k\}$, $(S, j)\, \phi_{k,n}(\delta)$ (resp. $(S, j)\, \phi'_{k,n}(\delta)) = x(S, \delta_{j-1} + 1) \cdots (S, \delta_j)$ avec $\delta_0 = 0$, $\delta_k = k$ et $x = \delta$ si $0 = \delta_{j-1} < \delta_j$, 1 sinon.

Remarquons que $G_{k,n}$ et $G'_{k,n}$ ne sont pas sous forme normale et que $G_{k,n}$ est libre à droite. De manière classique, nous allons d'abord donner une caractérisation homomorphique des familles LULT(k):

LEMME III.1. *Pour tout $k \in \mathbb{N}_+$ et tout langage L appartenant à* LULT$(2k)$ (LULT$(2k-1)$), *il existe $n \in \mathbb{N}_+$, un homomorphisme h et un langage rationnel R' tels que $L = h(L(G_{k,n}) \cap R')$ $(L = h(L(G'_{k,n}) \cap R'))$.*

Démonstration. Soit $G = (N, T, R, \phi, \omega)$ un k-EDT0L-système u.s.f.n. qui engendre L avec $N = M \times \{1,..., k\}$, $V = N \cup T$, $nt(\omega) = A$ et où R_1, $R_2 = \{d_1, ..., d_n\}$, R_3 désignent respectivement l'ensemble des règles de G qui sont terminales, linéaires, de transition. Pour tout $i \in \{1,..., n\}$ et tout $j \in \{1,..., k\}$, posons $B_i = ntg(d_i)$, $C_i = ntd(d_i)$ et $(B_i, j)(d_i) = u_{i,2j-1}(C_i, j)\, u_{i,2j}$. L'homomorphisme h est, alors, défini sur $T_{k,n}$ par: $h(\delta) = 1$, $\forall \delta \in \Delta_k$ et $h(d_{i,s}) = u_{i,s}$, $\forall i \in \{1,..., n\}$ et $\forall s \in \{1,..., 2k\}$.

Définissons, maintenant, le langage rationnel R' au moyen d'une grammaire linéaire à droite $H = (M, T_{k,n}, P, A)$ où l'ensemble des productions P est égal à $P_1 \cup P_2 \cup P_3 \cup P_4$ avec:

$$P_1 = \{B_i \to d_{i,1}C_i / i \in \{1,..., n\}\},$$
$$P_2 = \{B \to \delta C / \exists d \in R_3 \text{ telle que } ntg(d) = B,\ ntd(d) = C \text{ et type } (d) = \delta\},$$
$$P_3 = \{B \to d_{i,j}B / B \in M,\ i \in \{1,..., n\}, j \in \{2,..., 2k\}\},$$
$$P_4 = \{B \to 1 / \exists d \in R_1 \text{ avec } ntg(d) = B\}.$$

Il nous reste à montrer que $L(G) = h(L(G_{k,n}) \cap R')$ où R' est le langage engendré par la grammaire H. Remarquons, d'abord, que, par construction du système $G_{k,n}$, tout $z \in S(G_{k,n}) \backslash T_{k,n}^*$ se factorise en $z_1(S, 1) \cdots (S, k)\, z_{k+1}$ avec $z_2 \cdots z_{k+1} \in \{d_{i,j} / i \in \{1,..., n\},\ j \in \{2,..., 2k\}\}^*$. Montrons, maintenant, par induction la propriété suivante:

i) si $y_1(B, 1) \cdots y_k(B, k)\, y_{k+1} \in S(G)$ alors il existe $z_1,..., z_{k+1} \in T_{k,n}^*$ tels que:

$$h(z_s) = y_s,\ \forall s \in \{1,..., k+1\},$$
$$z_1(S, 1) \cdots (S, k) z_{k+1} \in S(G_{k,n}),$$
$$A \underset{H}{\overset{*}{\Rightarrow}} z_1 B$$

En effet, soit $\alpha \in R^*$ tel que $y_1(B, 1) \cdots (B, k)\, y_{k+1} = \omega\phi(\alpha)$. Si $\alpha = 1$, alors $y_1 \cdots y_{k+1} = 1$ et $B = A$. Il suffit de prendre $z_1 = \cdots = z_{k+1} = 1$. Prenons, maintenant, $y = y_1(B, 1) \cdots (B, k)\, y_{k+1} \in S(G)$ et $z = z_1(S, 1) \cdots (S, k)\, z_{k+1} \in S(G_{k,n})$ tels que $A \overset{*}{\Rightarrow}_H z_1 B$ et $\forall s \in \{1,..., k+1\}$, $h(z_s) = y_s$. Soit d une règle de G avec $ntg(d) = B$ et $ntd(d) = C$.

Distinguons deux cas:

— Si d est une règle linéaire, il existe $i \in \{1,..., n\}$ tel que $d = d_i$, $B = B_i$, $C = C_i$ et $y\phi(d_i) = y_1 u_{i,1}(C_i, 1) \cdots (C_i, k)\, u_{i,2k} y_{k+1} = y_1'(C_i, 1) \cdots y_k'(C_i, k)\, y_{k+1}'$ avec $\forall s \in \{2,..., k\}$, $y_s' = u_{i,2s-2} y_s u_{i,2s-1}$. Nous avons aussi $z\phi_{k,n}(d_i) = z_1 d_{i,1} \times (S, 1) \cdots (S, k)\, d_{i,2k} z_{k+1} = z_1'(S, 1) \cdots z_k'(S, k)\, z_{k+1}'$ avec $\forall s \in \{2,..., k\}$, $z_s' = d_{i,2s-2} z_s d_{i,2s-1}$ et donc $\forall s \in \{1,..., k+1\}$, $h(z_s') = y_s'$. En outre, comme $B_i \to d_{i,1}C_i \in P_1$, nous avons dans H la dérivation: $A \overset{*}{\Rightarrow}_H z_1 B_i \Rightarrow_{P_1} z_1 d_{i,1} C_i = z_1' C_i$.

— Si d est une règle de transition de type $\delta = (\delta_1,..., \delta_{k-1})$, $y\phi(d) = y_1(C, 1) \cdots (C, \delta_1) \cdots y_k(C, \delta_{k-1} + 1) \cdots (C, \delta_k)\, y_{k+1} = y_1'(C, 1) \cdots y_k'(C, k)\, y_{k+1}'$ avec $\delta_k = k$. De même, $z\phi_{k,n}(d) = z_1'(S, 1) \cdots (S, \delta_1) \cdots z_k'(S, \delta_{k-1} + 1) \cdots (S, \delta_k)\, z_{k+1} = z_1''(S, 1) \cdots z_k''(S, k)\, z_{k+1}''$ avec $\forall s \in \{1,..., k\}$, $z_s' = z_s\delta$ si $s = i_0$, le plus petit i vérifiant $\delta_i \neq 0$, z_s sinon. Comme $h(\delta) = 1$, $\forall s \in \{1,..., k+1\}$, $h(z_s'') = y_s'$ et comme $z_2 \cdots z_{i_0} \in \{d_{i,j}/i \in \{1,..., n\},\ j \in \{2,..., 2k\}\}^*$ et que $B \to \delta C$ est une production de P_2, nous avons dans H la dérivation:

$$A \overset{*}{\underset{H}{\Rightarrow}} z_1 B \overset{*}{\underset{P_3}{\Rightarrow}} z_1 \cdots z_{i_0} B \underset{P_2}{\Rightarrow} z_1 \cdots z_{i_0} \delta C = z_1'' C.$$

Réciproquement, montrons la propriété:

ii) Si $z_1(S, 1) \cdots z_k(S, k)\, z_{k+1} \in S(G_{k,n})$ et si $A \overset{*}{\Rightarrow}_H z_1 B$ avec $B \in M$, alors $h(z_1)(B, 1) \cdots h(z_k)(B, k)\, h(z_{k+1}) \in S(G)$.

En effet, soit $\alpha \in R_{k,n}^*$ tel que $z = z_1(S, 1) \cdots (S, k)\, z_{k+1} = \omega_k \phi_{k,n}(\alpha)$. Si $\alpha = 1$, $z_1 \cdots z_{k+1} = 1$ et $A \overset{*}{\Rightarrow}_H B$ implique $B = A$ et nous avons bien $\omega = (A, 1) \cdots (A, k) \in S(G)$. Supposons que pour tout $B \in M$ tel que $A \overset{*}{\Rightarrow}_H z_1 B$ on ait $h(z_1)(B, 1) \cdots (B, k)\, h(z_{k+1}) \in S(G)$ et prenons une règle d de $G_{k,n}$. Distinguons deux cas:

— Si d est une règle linéaire, il existe $i \in \{1,..., n\}$ tel que $d = d_i$. Alors, $z\phi_{k,n}(d) = z_1 d_{i,1}(S, 1)\, d_{i,2} z_2 d_{i,3} \cdots (S, k)\, d_{i,2k} z_{k+1}$. Par définition de H, si $A \overset{*}{\Rightarrow}_H z_1 d_{i,1} C$, on a $A \overset{*}{\Rightarrow}_H z_1 B \Rightarrow_{P_1} z_1 d_{i,1} C$ avec $B = ntg(d_i)$ et $C = ntd(d_i)$. Donc, $\forall j \in \{1,..., k\}$, $(B, j)\, \phi(d_i) = u_{i,2j-1}(C, j)\, u_{i,2j}$ ce qui implique

$$h(z_1 d_{i,1})(C, 1)\, h(d_{i,2} z_2 d_{i,3}) \cdots (C, k)\, h(d_{i,2k} z_{k+1}) \in S(G).$$

— Si d appartient à Δ_k, $d = \delta = (\delta_1, ..., \delta_{k-1})$ et $z\phi_{k,n}(d) = z_1'(S, 1) \cdots (S, \delta_1) \cdots z_k'(S, \delta_{k-1} + 1) \cdots (S, \delta_k)\, z_{k+1} = z_1''(S, 1) \cdots z_k''(S, k)\, z_{k+1}''$ avec $\delta_k = k$ et $\forall s \in \{1,..., k\}$, $z_s' = z_s \delta$ si $i = i_0$, le plus petit $i \in \{1,..., k\}$ tel que $\delta_i \neq 0$, z_s sinon et donc $z_1'' = z_1 \cdots z_{i_0} \delta$. D'autre part si $A \overset{*}{\Rightarrow}_H z_1'' C$, il existe $B \in M$ tel que $A \overset{*}{\Rightarrow}_H z_1'' B$ et $B \to \delta C$ appartient à P_2. Donc, il existe dans G, une règle de transition d' de type δ avec $B = ntg(d')$ et $C = ntd(d')$. Comme $h(\delta) = 1$, il est clair que $h(z_1'')(C, 1) \cdots (C, k)\, h(z_{k+1}'') = h(z_1')(C, 1) \cdots (C, \delta_1) \cdots h(z_k') \times (C, \delta_{k-1} + 1) \cdots (C, \delta_k)\, h(z_{k+1}') \in S(G)$ ce qui achève la démonstration de la propriété ii).

Prenons, maintenant, un mot y appartenant à $L(G)$. Il existe, alors, $y_1(B, 1) \cdots y_k(B, k)\, y_{k+1} \in S(G)$ et une règle terminale $d \in R_1$ tels que $ntg(d) = B$ et $y = y_1 \cdots y_{k+1}$. D'après la propriété i), il existe $z' = z_1(S, 1) \cdots (S, k)\, z_{k+1} \in S(G_{k,n})$ avec $A \overset{*}{\Rightarrow}_H z_1 B$ et $\forall s \in \{1,..., k + 1\}$, $h(z_s) = y_s$. Nous avons, dans H, la dérivation suivante: $A \overset{*}{\Rightarrow}_H z_1 B \overset{*}{\Rightarrow}_{P_3} z_1 \cdots z_{k+1} B \Rightarrow_{P_4} z_1 \cdots z_{k+1} = z$ donc $z \in R'$ et comme $z = z'\phi_{k,n}(f)$ appartient à $L(G_{k,n})$, $y = h(z) \in h(L(G_{k,n}) \cap R')$.

Réciproquement, prenons $z \in L(G_{k,n}) \cap R'$. Il existe, alors, une factorisation de z en $z_1 \cdots z_{k+1}$ telle que $z' = z_1(S, 1) \cdots (S, k)\, z_{k+1} \in S(G_{k,n})$ et donc $z_2 \cdots z_{k+1} \in \{d_{i,j}/i \in \{1,..., n\},\ j \in \{2,..., 2k\}\}^*$. Par définition de la grammaire H et comme $z \in R'$, il existe dans G, une règle terminale d avec $B = ntg(d)$ telle que $A \overset{*}{\Rightarrow}_H z_1 B$. D'après la propriété ii), $y' = h(z_1)(B, 1) \cdots (B, k)\, h(z_{k+1})$ appartient à $S(G)$ et $h(z) = y'\phi(d)$ appartient à $L(G)$, donc $L = h(L(G_{k,n}) \cap R')$.

Le cas où L appartient à LULT$(2k-1)$ se traite de la même façon, à condition de remarquer qu'il existe un k-EDT0L-système u.s.f.n. $G = (N, T, R, \phi, \omega)$ libre à droite avec $N = M \times \{1,..., k\}$, $V = N \cup T$ qui engendre L et tel que pour toute règle non terminale d et tout $B \in M$, $(B, k)\ \phi(d) \in V^*N$ (cf. corollaire II.4 et démonstration de la proposition II.7). Ceci implique, en particulier, que pour toute règle de transition d' de G, type (d') appartient à Δ'_k. ∎

Pour tout $n \in \mathbb{N}_+$, $G_{k,n}(G'_{k,n})$ est un k-EDT0L-système ultralinéaire (libre), donc $L(G_{k,n})(L(G'_{k,n}))$ appartient à LULT$(2k)$(LULT$(2k-1)$). Montrons, maintenant, que $\forall n \in \mathbb{N}_+$, $L(G_{k,n})(L(G'_{k,n}))$ appartient au cône rationnel généré par $L(G_{k,2})(L(G'_{k,2}))$. Pour tout $j \in \{1,..., k\}$ et tout $i \in \{1,..., n\}$, posons $u_{i,2j-1} = d^i_{1,2j-1}d_{2,2j-1}$, $u_{i,2j} = d_{2,2j}d^i_{1,2j}$ et $U_{k,n} = (\{u_{i,j}/i \in \{1,..., n\}, j \in \{1,..., 2k\}\} \cup \Delta_k)^*$. Définissons sur $T_{k,n}$, l'homomorphisme $g_{k,n}$ par $g_{k,n}(\delta) = \delta\ \forall \delta \in \Delta_k$ et $g_{k,n}(d_{i,j}) = u_{i,j}$, $\forall i \in \{1,..., n\}$ et $\forall j \in \{1,..., 2k\}$. Il est, alors, facile de vérifier que $L(G_{k,n}) = g^{-1}_{k,n}(L(G_{k,2}) \cap U_{k,n})$ et $L(G'_{k,n}) = g^{-1}_{k,n}(L(G'_{k,2}) \cap U_{k,n})$ et comme $U_{k,n}$ est un langage rationnel, nous avons:

Proposition III.2. *Pour tout* $k \in \mathbb{N}_+$, LULT$(2k)$(LULT$(2k-1)$) *est le plus petit cône rationnel contenant le langage* $L(G_{k,2})(L(G'_{k,2}))$, *donc c'est un cône rationnel principal.*

En particulier, si nous prenons $k = 1$, nous trouvons comme générateur du cône rationnel LULT(2) = Lin, le langage $L(G_{1,2})$ qui est isomorphe au générateur classique, $L_0 = \{w\bar{w}^R/w \in \{a, b\}^*\}$, de la famille des langages algébriques linéaires. Pour $k \geqslant 2$, il n'est guère possible de définir les langages $L(G_{k,2})$ et $L(G'_{k,2})$ sauf le langage $L(G'_{2,2})$. En effet, le système $G'_{2,2}$ ne possède qu'une seule règle de transition appelée, suivant les notations définies au début de la section, (0) et qui vérifie: $(S, 1)\ \phi'_{2,2}((0)) = 1$ et $(S, 2)\ \phi'_{2,2}((0)) = (0)(S, 1)(S, 2)$. Donc $L(G'_{2,2}) = (L(0))^*$ où L est le langage engendré par le 2-EDT0L-système ultralinéaire $G''_{2,2} = (N_2, T_{2,2}, R''_{2,2}, \phi''_{2,2}, \omega_2)$ où $R''_{2,2} = R'_{2,2}\backslash\Delta'_2$ et $\phi''_{2,2}$ est la restriction de $\phi'_{2,2}$ à $R''_{2,2}$. Il est alors, clair que L est rationnellement équivalent au langage $L_1 = \{w\bar{w}^Rw/w \in \{a, b\}^*\}$, donc:

Proposition III.3. *La famille* LULT(3) *est la plus petite* FAL *contenant le langage* $\{w\bar{w}^Rw/w \in \{a, b\}^*\}$.

IV. Rang d'un Lult-langage

Soit L un langage appartenant à la famille LULT. Nous dirons que L est de rang k, avec $k \in \mathbb{N}_+$, et nous écrirons $r(L) = k$ si $L \in$ LULT$(k)\backslash$LULT$(k-1)$ en prenant la convention que LULT(0) est la famille vide. En particulier tout langage rationnel est un LULT-langage de rang 1 et tout langage linéaire non rationnel est un LULT-langage de rang 2. Dans cette section, nous allons étudier le comportement du rang vis à vis d'un certain nombre d'opérations sur les langages. Commençons par une opération qui est définie dans Ginsburg, Goldstine et Greibach (1975) qui à tout langage L fait correspondre $L[c] = \{wc^n/w \in L, n = l(w)\}$. Nous allons montrer que, si c n'occurre dans aucun mot de L, LULT-langage infini, cette opération augmente le rang de 1.

PROPOSITION IV.1. *Soient $L \subseteq T^*$ un* LULT-*langage infini et c une lettre n'appartenant pas à T. Le rang du langage $L' = L[c]$ est égal à $r(L) + 1$.*

Démonstration. Posons $k' = r(L)$. Il est clair que $k' \leqslant r(L') \leqslant k' + 1$. Il reste à montrer que le rang de L' est différent de k'. Distinguons deux cas:

1) Supposons k' pair et posons $k' = 2k$. Supposons $r(L') = 2k$. Il existe, alors, un k-EDTOL-système u.s.f.n. réduit $G = (N, T', R, \phi, \omega)$ qui engendre L' avec $T' = T \cup \{c\}$, $N = M \times \{1,..., k\}$, $V' = N \cup T'$ et $nt(\omega) = \Delta$. Considérons $G' = (N, T, R, \phi', \omega)$ où ϕ' est défini par: $\forall u \in V = N \cup T$, $\forall d \in R, u\phi'(d) = h_c(u\phi(d))$, h_c étant l'homomorphisme défini sur V' par $h_c(c) = 1$ et $h_c(u) = u$, $\forall u \in V$. G' est un k-EDT0L-système u.s.f.n. réduit qui engendre L. L'ensemble $\Delta = \{B \in M/\exists y \in S(G') \cap V^*T$ avec $nt(y) = B\}$ est effectivement constructible. De plus, pour tout $B \in \Delta$, l'ensemble $Z_B = \{(x_1,..., x_k)/ \exists \alpha \in R^*, \forall i \in \{1,..., k\}, (B, i)\,\phi'(\alpha) = x_i \in T^*\}$ est fini. En effet, si $y \in S(G') \cap V^*T$, il existe $i \in \mathbb{N}_+$ tel que $yc^i \in S(G)$ et pour tout $\alpha \in R^*$, $y\phi'(\alpha) = z \in T^*$ implique $(yc^i)\,\phi(\alpha) = zc^i$ donc $l(z) = i$ et pour tout $B \in \Delta$, il existe un entier $j(B)$ tel que $(x_1,..., x_k) \in Z_B$ entraîne $l(x_1 \cdots x_k) = j(B)$.

Considérons, alors, le k-EDT0L-système ultralinéaire $G'' = (N, T, R'', \phi'', \omega)$ où $R'' = R_1'' \cup R_2''$ avec:

$$R_1'' = \{d \in R/d \text{ est une règle terminale ou bien } ntd(d) \notin \Delta\},$$

$$R_2'' = \{(d, x)/d \in R \text{ avec } ntd(d) = B \in \Delta \text{ et } x \in Z_B\}.$$

L'application ϕ'' est définie sur R'' par: $\phi''(d) = \phi'(d)$, $\forall d \in R_1''$ et pour tout $(d, x) \in R_2''$, on pose, $\forall u \in V$, $u\phi''((d, x)) = h_x(u\phi'(d))$ où h_x est l'homomorphisme défini sur V de la manière suivante: posons $B = ntd(d)$ et $x = (x_1,..., x_k)$. Pour tout $i \in \{1,..., k\}$, $h_x((B, i)) = x_i$ et $\forall u \in V\backslash(\{B\} \times \{1,..., k\})$, $h_x(u) = u$. Par construction, G'' est libre à droite et il est facile de vérifier que $L(G'') = L$, d'où la contradiction puisque $r(L) = 2k$.

2) Supposons k' impair et posons $k' = 2k - 1$. Si $k' = 1$. L est un langage rationnel infini et $L' = L[c]$ est un langage algébrique linéaire non rationnel, donc $r(L') = 2 = r(L) + 1$. Prenons $k' \geqslant 3$ et supposons que $r(L') = k' = 2k - 1$. Il existe alors, un k-EDT0L-système u.s.f.n. réduit, libre à gauche qui engendre L'. En utilisant la même construction que dans le cas 1), nous obtenons un k-EDT0L-système ultralinéaire libre à droite et à gauche qui engendre L. Comme k est supérieur à 1, la proposition II.7, permet d'affirmer que $L \in$ LULT$(2k - 2)$, ce qui contredit le fait que $r(L) = 2k - 1$. ∎

Pour tout $k \in \mathbb{N}_+$, notons $E_k = \{a_1{}^n \cdots a_k{}^n / n \geqslant 0\}$. Comme E_{k+1} est rationnellement équivalent à $E_k[c]$, nous avons pour tout $k \in \mathbb{N}_+$, $r(E_{k+1}) = r(E_k) + 1$. Etant donné que $E_1 = a_1^*$ est un langage rationnel infini, on en déduit:

Corollaire IV.2. *Pour tout* $k \in \mathbb{N}_+$, *le langage* $E_k = \{a_1{}^n \cdots a_k{}^n / n \geqslant 0\}$ *est un* LULT-*langage de rang k.*

Nous pouvons donc en déduire que la hièrarchie LULT(k) est infinie ce qui entraine en particulier que LULT $= \bigcup_{k \geqslant 1}$ LULT(k) n'est pas une FAL principale. Nous allons préciser ces résultats en montrant d'abord que pour tout $k \in \mathbb{N}_+$, $E_{k+1} \in \mathrm{LULT}(k+1) \backslash \mathscr{F}_\sigma(\mathrm{LULT}(k))$ où pour toute famille de langage $\mathscr{L}$, $\mathscr{F}_\sigma(\mathscr{L})$ désigne la plus petite FAL close par substitution contenant $\mathscr{L}$. Dans ce but, introduisons la notion de langage sans insertion qui est plus restrictive que cell CIL-langage utilisée dans Latteux (1977a).

Définition. L est un CIL-*langage* ou *langage sans produit* si $L_1 L_2 \subseteq L$ implique L_1 ou L_2 est un langage fini.

Définition. L est un *langage sans insertion* si $\forall L_1, L_2$ langages infinis, il existe $x_1 \in L_1$ tel que toute factorisation de x_1 en $x_1' x_1''$ vérifie $x_1' L_2 x_1'' \nsubseteq L$.

Il est clair que tout langage sans insertion est un CIL-langage et que tout CIL-langage est un langage sans facteur itérant (ne contenant aucun langage rationnel infini). D'autre part, la notion de langage sans insertion n'a guère d'intérêt dans le cadre des langages algébriques, puisque tout langage algébrique sans insertion est fini. Cependant, il est facile de construire des langages sans insertion.

Lemme IV.3. *Pour tout langage* $L \subseteq T^*$ *avec* $c \notin T$, $L[c]$ *est un* CIL-*langage. De plus* $L[c]$ *est un langage sans insertion si et seulement si* L *est un* CIL-*langage.*

Démonstration. Supposons, en effet, qu'il existe deux langages infinis L_1 et L_2 tels que $L_1 L_2 \subseteq L[c]$. Si L_2 est inclus dans c^*, pour tout $x_1 \in L_1$, il existe $i > l(x_1)$ tel que $c^i \in L_2$, donc $x_1 c^i \in L_1 L_2 \backslash L[c]$. Dans le cas contraire, L_1 est inclus dans T^* et pour tout $x_2 \in L_2$, il existe $x_1 \in L_1$ avec $l(x_1) > l(x_2)$, donc $x_1 x_2 \in L_1 L_2 \backslash L[c]$, d'où la contradiction.

Supposons, maintenant, que $L[c]$ ne soit pas sans insertion. Il existe, alors, deux langages infinis L_1 et L_2 tels que pour tout $x_1 \in L_1$, il existe une factorisation $x_1 = x_1' x_1''$ avec $x_1' L_2 x_1'' \subseteq L[c]$. Il existe aussi des entiers n_1 et n_2 tels que $\forall x_1 \in L_1$, $\forall x_2 \in L_2$, $l_c(x_1) - l_T(x_1) = n_1$ et $l_c(x_2) - l_T(x_2) = n_2$ avec $n_1 + n_2 = 0$ ($l_c(x)$ et $l_T(x)$ désignent respectivement le nombre d'occurrences, dans x, de la lettre c, de lettres appartenant à T). Comme L_2 est infini, $L_2 \cap T^+ c^+ \neq \varnothing$ et $x_1' L_2 x_1'' \subseteq L[c]$ implique $x_1' \in T^*$ et $x_1'' \in c^*$. Soit h_c, l'homomorphisme défini sur $T \cup \{c\}$ par $h_c(c) = 1$ et $h_c(a) = a$, $\forall a \in T$. Comme L_1 est infini et $l_c(x_1) - l_T(x_1) = n_1$,

$h_c(L_1)$ est infini. De même $h_c(L_2)$ est infini et comme $x'_1L_2x''_1 \subseteq L[c]$ implique $h_c(x'_1x''_1) = x'_1$, L contient $h_c(L_1)\, h_c(L_2)$, le produit de deux langages infinis.

Supposons, enfin, que L contienne le produit $L'_1L'_2$ de deux langages infinis. Les langages $L_1 = L'_1[c]$ et $L_2 = L'_2[c]$ sont infinis et vérifient: tout mot x_1 de L_1 se factorise en x'_1c^n avec $n = l(x'_1)$ et $x'_1L_2c^n$ est inclus dans $L[c]$ qui n'est donc pas un langage sans insertion. ∎

En utilisant le fait que l'image d'un langage infini par un homomorphisme h non effaçant ($h(x) = 1$ implique $x = 1$) est encore infini, nous obtenons immédiatement:

Lemme IV.4. *Soient L un langage inclus dans T^* et h un homomorphisme non effaçant défini sur T^*. Si le langage $h(L)$ est sans facteur itérant (resp. sans produit, sans insertion), L est aussi un langage sans facteur itérant (resp. sans produit, sans insertion).*

D'après le lemme IV.3, pour tout entier $k \geqslant 3$, le langage $E'_k = \{a_1^{n_1}a_2^{n_2} \cdots a_k^{n_k}/n_1 \geqslant 0, \forall i \in \{2,..., k\}, n_i = \sum_{j=1}^{i-1} n_j\}$ est un langage sans insertion et comme il existe un homomorphisme non effaçant h_k tel que $h_k(E_k) = E'_k$, on en déduit que pour tout entier $k \geqslant 3$, le langage E_k est sans insertion. Pour montrer que E_{k+1} n'appartient pas à $\mathscr{F}_\sigma(\mathrm{LULT}(k))$, nous allons utiliser une propriété générale des langages sans insertion. Rappelons d'abord la définition de l'insertion qui est une substitution particulière.

Définition. Une substitution s définie sur T^* est une *$\mathscr{L}$-insertion sur L* s'il existe $T' \subseteq T$ tel que:

i) $L \subseteq (T\backslash T')^*(T' \cup \{1\})(T\backslash T')^*$,
ii) $s(a) = \{a\}, \forall a \in T\backslash T'$,
iii) $s(a) \in \mathscr{L}, \forall a \in T'$.

Pour toute famille de langage $\mathscr{L}$, posons $I_1(\mathscr{L}) = \mathscr{L}$ et $\forall n \in \mathbb{N}_+$, $I_{n+1}(\mathscr{L}) = I_n(\mathscr{L})i\, \mathscr{L} = \{s(L)/L \in I_n(\mathscr{L})$ et s est une $\mathscr{L}$-insertion sur $L\}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}_+$, et tout cône rationnel $\mathscr{L}$, $I_n(\mathscr{L})$ est aussi un cône rationnel et $\mathscr{C}_i(\mathscr{L})$, le plus petit cône rationnel clos par insertion contenant $\mathscr{L}$ est égal à $\bigcup_{n\geqslant 1} I_n(\mathscr{L})$ (cf. Greibach, 1972).

Dans Latteux (1977a), il était montré une propriété liant les langages sans produit et les cônes rationnels clos par insertion:

Proposition IV.5. *Soient $\mathscr{L}$ un cône rationnel fermé par union et L un langage sans produit n'appartenant pas à $\mathscr{L}$. Alors L n'appartient pas à $\mathscr{F}(\mathscr{L})$, la plus petite* FAL *contenant $\mathscr{L}$ et si $\mathscr{L}$ est clos par insertion, L n'appartient pas à $\mathscr{F}_\sigma(\mathscr{L})$ la plus petite* FAL *close par substitution contenant $\mathscr{L}$.*

Si, maintenant, nous imposons au langage L d'être sans insertion, il n'est plus nécessaire que $\mathscr{L}$ soit clos par insertion pour obtenir la deuxième propriété de la proposition précédente. Nous avons, en effet:

PROPOSITION IV.6. *Soit $\mathscr{L}$ un cône rationnel fermé par union. Tout langage sans insertion appartenant à $\mathscr{F}_\sigma(\mathscr{L})$ appartient à $\mathscr{L}$.*

Démonstration. Montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}_+$ et tout langage L sans insertion, $L \in I_{n+1}(\mathscr{L})$ implique $L \in I_n(\mathscr{L})$. Prenons, en effet, $L \in I_{n+1}(\mathscr{L}) = I_n(\mathscr{L})\, i\mathscr{L}$. Il existe un langage $L' \in I_n(\mathscr{L})$ et s une $\mathscr{L}$-insertion sur L' tels que $s(L') = L$. Donc il existe un alphabet T et $T' \subseteq T$ tels que $L' \subseteq (T\backslash T')^* \times (T' \cup \{1\})(T\backslash T')^*$, $s(a) = a$, $\forall a \in T\backslash T'$ et $s(a) \in \mathscr{L}$, $\forall a \in T'$. Alors $s(L') = L_1 \cup (\bigcup_{a\in T'} s(L'_a))$ où $L'_1 = L' \cap (T\backslash T')^*$ et $\forall a \in T'$, $L'_a = L' \cap (T\backslash T')^*\{a\} \times (T\backslash T')^*$ sont des langages de $I_n(\mathscr{L})$ qui est un cône rationnel clos par union. Il nous reste, donc, à montrer que $\forall a \in T'$, $s(L'_a)$ appartient à $I_n(\mathscr{L})$. Comme L est sans insertion, pour tout $a \in T'$, $s(L'_a) \subseteq L$ est aussi sans insertion. Nécessairement, ou bien L'_a est fini, ou bien $s(a)$ est fini. Dans les deux cas $s(L'_a)$ appartient à $I_n(\mathscr{L})$.

Comme $I_1(\mathscr{L}) = \mathscr{L}$ et $\mathscr{C}_i(\mathscr{L}) = \bigcup_{n\geqslant 1} I_n(\mathscr{L})$, on en déduit que tout langage sans insertion appartenant à $\mathscr{C}_i(\mathscr{L})$, appartient à $\mathscr{L}$. Le résultat cherché découle, alors, immédiatement de la proposition précédente. ▮

Comme pour tout entier $k \geqslant 2$, E_{k+1} est un langage sans insertion n'appartenant pas à LULT(k) et que E_2 n'appartient pas à $\mathscr{F}_\sigma$(LULT(1)) qui est la famille des langages rationnels, nous en déduisons que pour tout $k \in \mathbb{N}_+$, le langage $E_{k+1} \in \mathrm{LULT}(k+1)\backslash\mathscr{F}_\sigma(\mathrm{LULT}(k))$. Ceci entraîne que, contrairement à la famille des langages quasi-rationnels qui est égale à $\mathscr{F}_\sigma(L_0)$ avec $L_0 = \{w\tilde{w}^R / w \in \{a, b\}^*\}$ (Nivat, 1968), la famille LULT ne peut pas être générée par les "FAL-opérations" et la substitution à partir d'un seul langage. Supposons en effet qu'il existe un LULT-languague L tel que $\mathscr{F}_\sigma(L) = \mathrm{LULT}$. Il existe, alors $k \in \mathbb{N}_+$ tel que $L \in \mathrm{LULT}(k)$ ce qui implique $E_{k+1} \in \mathrm{LULT}(k+1)\backslash\mathscr{F}_\sigma(\mathrm{LULT}(k))$ et $E_{k+1} \in \mathrm{LULT}\backslash\mathscr{F}_\sigma(L)$ d'où la contradiction. Donc:

PROPOSITION IV.7. *Pour tout* LULT*-langage L, $\mathscr{F}_\sigma(L)$, la plus petite* FAL *close par substitution et contenant L est strictement incluse dans* LULT.

Nous pouvons généraliser ce résultat en montrant que pour tout cône rationnel clos par union $\mathscr{L}$ inclus dans LULT, $\mathscr{F}_\sigma(\mathscr{L}) = \mathrm{LULT}$ si et seulement si $\mathscr{L} = \mathrm{LULT}$. Supposons, en effet, que $\mathscr{F}_\sigma(\mathscr{L}) = \mathrm{LULT}$ et qu'il existe $L \in \mathrm{LULT}\backslash\mathscr{L}$. Prenons c et d deux symboles n'apparaissant pas dans L. Le langage $L' = \{xc^nd^n / x \in L, n \geqslant 0\}$ est un langage sans insertion qui appartient à $\mathrm{LULT} = \mathscr{F}_\sigma(\mathscr{L})$ et donc à $\mathscr{L}$ ce qui entraîne que L, qui est obtenu à parti de L' en effaçant les lettres c et d, appartient aussi à $\mathscr{L}$, d'où la contradiction, donc:

PROPOSITION IV.8. *Soit $\mathscr{L}$ un cône rationnel fermé par union, inclus dans* LULT. *Alors $\mathscr{F}_\sigma(\mathscr{L}) = \mathrm{LULT}$ si et seulement si $\mathscr{L} = \mathrm{LULT}$.*

Calculons, maintenant, le rang du produit de deux LULT-langages définis sur des alphabets disjoints.

PROPOSITION IV.9. *Soient L_1 et L_2 deux* LULT-*langages définis sur des alphabets disjoints. Le rang du produit L_1L_2, $r(L_1L_2)$ est égal à $2k+1$ si $r(L_1) = r(L_2) = 2k$, est égal à* $\sup(r(L_1), r(L_2))$ *sinon.*

Démonstration. Posons $k' = \sup(r(L_1), r(L_2))$. Il est clair que $r(L_1L_2) \geqslant k'$ Distinguons plusieurs cas.

— Si $k' = 2k-1$, comme LULT$(2k-1)$ est clos par produit, $L_1L_2 \in$ LULT$(2k-1)$ et $r(L_1L_2) = k'$.

— Si $k' = 2k = r(L_1)$ et $r(L_2) < 2k$. Il existe un k-EDT0L-système ultralinéaire (libre à gauche) qui engendre $L_1(L_2)$. Il est alors facile, de construire à partir de ces deux systèmes, un k-EDT0L-système ultralinéaire qui engendre L_1L_2. Donc $r(L_1L_2) = k'$.

— Si $k' = 2k = r(L_2)$ et $r(L_1) < 2k$, nous obtenons, par un raisonnement analogue $r(L_1L_2) = k'$.

— Si $k' = 2k = r(L_1) = r(L_2)$, L_1 et $L_2 \in$ LULT$(2k+1)$, donc $L_1L_2 \in$ LULT$(2k+1)$ et $2k \leqslant r(L_1L_2) \leqslant 2k+1$. Montrons que $r(L_1L_2) \neq 2k$. Supposons, en effet, qu'il existe un k-EDT0L-système u.s.f.n. réduit, $G = (N, T, R, \phi, \omega)$ qui engendre L_1L_2 avec $T = T_1 \cup T_2$, $L_1 \subseteq T_1^*$ et $L_2 \subseteq T_2^*$. Pour $i = 1, 2$, l'homomorphisme h_i est défini sur $V = N \cup T$ par $h_i(a) = a$, $\forall a \in T_i \cup N$ et $h_i(a) = 1$, $\forall a \in T \backslash T_i$. Pour $i = 1, 2$, soit $G_i = (N, T_i, R, \phi_i, \omega)$ un k-EDT0L-système ultralinéaire où ϕ_i est défini par: $\forall d \in R$, $\forall u \in N \cup T_i$, $u\phi_i(d) = h_i(u\phi(d))$. Il est clair que $L_1' = L_d(G_1) \subseteq L(G_1) = L_1$ et que $L_2' = L_g(G_2) \subseteq L(G_2) = L_2$, donc $L_1'L_2 \cup L_1L_2'$ est inclus dans L_1L_2. Réciproquement, prenons $x_1x_2 \in L_1L_2$ avec $x_1 \in L_1$ et $x_2 \in L_2$. Comme $x_1x_2 \in L(G)$, il existe $\alpha \in R^*$, $d \in R$ tels que $\omega\phi(\alpha d) = x_1x_2$ et $y = \omega\phi(\alpha) \notin T^*$. Le mot y se factorise alors en y_1y_2 avec $y_2 \in NV^*$ et $y_1 \in T^*$. Si y_1 appartient à T_1^*, $z_2 = \omega\phi_2(\alpha) \in NV^*$ et $x_2 = z_2\phi_2(d) \in L_g(G_2)$. Si y_1 appartient à $T_1^*T_2^+$, $x_1 = h_1(y_1) = \omega\phi_1(\alpha) \in L_d(G_1)$. Donc $L_1L_2 = L_1'L_2 \cup L_1L_2'$, ce qui implique soit $L_1 = L_1' \in$ LULT$(2k-1)$, soit $L_2 = L_2' \in$ LULT$(2k-1)$, d'où la contradiction. ∎

Ce résultat peut s'exprimer de la façon suivante:

COROLLAIRE IV.10. *Soient L_1 et L_2 deux langages de* LULT$(2k)$ *définis sur des alphabets disjoints. Alors L_1L_2 appartient à* LULT$(2k)$ *si et seulement si l'un des deux langages appartient à* LULT$(2k-1)$.

Considérons un langage $L \subseteq T^*$ et d un symbole n'appartement pas à T. Comme LULT$(2k)$ est un cône rationnel, si $(Ld)^* \in$ LULT$(2k)$, le produit $LL' \in$ LULT$(2k)$ où L' est une "recopie" de L sur un alphabet disjoint. Le corollaire précédent entraîne, alors, $L \in$ LULT$(2k-1)$ qui est une FAL donc $(Ld)^* \in$ LULT$(2k-1)$.

COROLLAIRE IV.11. *Soient* $L \subseteq T^*$ *et* $d \notin T$. *Alors,* $\forall k \in \mathbb{N}_+$, $(Ld)^* \in$ LULT$(2k)$ *si et seulement si* $(Ld)^* \in$ LULT$(2k-1)$.

Comme pour tout $k \in \mathbb{N}_+$, $E_{k+1} \in$ LULT$(k+1)\backslash\mathscr{F}($LULT$(k))$, nous pouvons, aussi en déduire:

COROLLAIRE IV.12. *Pour tout* $k \in \mathbb{N}_+$, LULT$(2k) \subsetneq \mathscr{F}($LULT$(2k)) \subsetneq$ LULT$(2k+1)$.

Nous avons vu à la section 2, que pour tout $k \in \mathbb{N}_+$, LULT$(2k)$ est fermé par crochet. Le résultat que nous allons énoncer ci-dessous, montre que pour tout $k \in \mathbb{N}_+$, LULT$(2k-1)$ n'est pas translatable, mais qu'il existe des LULT-langages $L \subseteq T^*$ de rang $2k+1$ avec $a, b, \bar{a}, \bar{b} \notin T$, tels que le langage $L' = \langle L \rangle$ soit encore de rang $2k+1$. Dès que k est supérieur à 1, ce résultat reste valable pour $L'' = (L)_2$.

PROPOSITION IV.13. *Soient* $L \subseteq T^*$ *un* LULT-*langage,* a, b, c *des lettres* $\notin T$ *et* $L_1 = \langle LcL \rangle$. *Alors le rang de* L_1 *est égal à* $r(L)+1$.

Pour démontrer cette proposition, nous utiliserons les lemmes suivants. Le premier généralise le corollaire II.8:

LEMME IV.14. *Soient* $G = (N, T, R, \phi, \omega)$ *un* k-EDT0L-*système ultralinéaire avec* $k \geqslant 2$ *et* $V = N \cup T$. *Si* $S(G)\backslash T^*$ *est inclus dans* $NV^*N \cup V^*N^2$, *alors* $L(G)$ *appartient à* LULT$(2k-2)$.

Démonstration. On peut supposer sans nuire à la généralité de la démonstration que G est sous forme normale avec $N = M \times \{1,..., k\}$ et $nt(\omega) = A$. Posons $M' = \{0,..., k\} \times \{1,..., k\} \times M$, $N' = M' \times \{1,..., k\}$, $V' = N' \cup T$, $\omega' = (k, k, A, 1) \cdots (k, k, A, k)$ et $R' = \{0\} \times \{1,..., k\} \times \{d \in R/d$ est terminale$\} \cup \{0,..., k\} \times \{1,..., k\} \times \{d \in R/d$ est non terminale$\}$. Considérons $G' = (N', T, R', \phi', \omega')$ le k-EDT0L-système ultralinéaire où ϕ' est défini de la manière suivante:

1) Si d est une règle de transition et si $j \geqslant 2$, nous poserons $\forall s \in \{1,..., k-j\}$, $(i, j, B, s)\, \phi'(i, j, d) = h_{i',j'}((B, s)\, \phi(d))$ où i' est égal au plus grand entier tel que $((B, 1) \cdots (B, i))\, \phi(d) \in N^{i'}V^*$, j' est le plus grand entier tel que $((B, k+1-j) \cdots (B, k))\, \phi(d) \in V^*N^{j'}$ et $h_{i',j'}$ est l'homomorphisme défini sur V par $h_{i',j'}(a) = a$, $\forall a \in T$ et $h_{i',j'}(C, s) = (i', j', C, s)$, $\forall (C, s) \in N$. Soit $C = ntd(d)$. Alors, $\forall s \in \{k-j+1,..., k-2\}$, $(i, j, B, s)\, \phi'(i, j, d) = 1$, $(i, j, B, k-1)\, \phi'(i, j, d) = (i', j', C, k+1-j') \cdots (i', j', C, k-1)$ et $(i, j, B, k)\, \phi'(i, j, d) = (i', j', C, k)$.

2) Dans le cas contraire, nous poserons, pour tout $s \in \{1,..., k\}$, $(i, j, B, s)\, \phi'(i, j, d) = h_{i',j'}((B, s)\, \phi(d))$ où $i', j', h_{i',j'}$ ont la même définition que dans le cas 1).

G' est k-EDT0L-système u.s.f.n. libre à droite qui vérifie, par construction:

a) Si $y \in S(G')\backslash T^*$ avec $nt(y) = (i, j, B)$, i et j sont les plus grands entiers tels que, respectivement, $y \in N'^i V'^*$ et $y \in V'^* N'^j$.

La définition de ϕ' dans le cas 1) et l'hypothèse vérifiée par le système G, permettent alors d'affirmer:

b) Si $y \in S(G')\backslash T^*$ avec $nt(y) = (0, j, B)$, alors, pour tout $\alpha \in R'^*$, $(0, j, B, k)\,\phi'(\alpha) \in N' \cup \{1\}$.

Enfin, en remarquant que les règles terminales de G' sont de la forme $(0, j, d)$, donc ne "s'appliquent" qu'à des mots appartenant à $T^+N'V'^*$, il est facile de montrer par récurrence que $L(G') = \{w \in T^*/\exists d \in R, y \in S(G) \cap T^+NV^*$ tel que $y\phi(d) = w\}$. Et d'après l'hypothèse faite sur G, $L(G) = L_{dg}(G) \cup L(G')$. Comme $L_{dg}(G) \in \text{LULT}(2k-2)$ (proposition II.7), il nous reste à montrer que $L(G') \in \text{LULT}(2k-2)$. Comme G' est un système sous forme normale libre à droite, nous pouvons appliquer à G', la construction du lemme II.1, qui nous permet d'obtenir à partir de G', un k-EDT0L-système $G'' = (N'', T, R'', \phi'', \omega'')$, libre à gauche, équivalent à G', avec $M'' = M' \cup \{A'\}$, $R'' = R' \cup \{f\}$ où A' et f sont des nouveaux symboles, $N'' = M'' \times \{1, \ldots, k\}$ et $\omega'' = (A', 1) \cdots (A', k)$. Posons $R''_1 = \{(0, j, d) \in R''\}$, $R''_2 = \{d'' = (i, j, d)/i \neq 0$ et $ntg(d'') = (0, j', B)\}$ et $R''_3 = \{d'' \in R''/ntg(d'') = (i, j, B)$ avec $i \neq 0\}$. Il est, alors, clair que $R'' = R''_1 \cup R''_2 \cup R''_3$ et que, pour tout $y \in S(G'')$, il existe $\alpha \in R''_1 \cup R''^+_1 R''_2 R''^*_3$ tel que $\omega''\phi''(\alpha) = y$.

Considérons, maintenant le système $G''_1 = (N'', T, R'', \phi''_1, \omega''_1)$ obtenu à partir de G'' de la manière suivante: $\omega''_1 = (A', 1) \cdots (A', k-1)$, ϕ''_1 est identique à ϕ'' sur $R''_1 \cup R''_3$ et pour tout $d'' = (i, j, d) \in R''_2$ avec $(i, j, B) = ntd(d'')$ et $(0, j', C) = ntg(d'')$, nous poserons, $\forall s \in \{1, \ldots, k\}$, $(0, j', C, s)\,\phi''_1(d'') = g((0, j', C, s)\,\phi''(d''))$ où g est l'homomorphisme défini sur V'' par $g(x) = 1$ si $x = (i, j, B, 1)$, $g(x) = x$ sinon.

Montrons, d'abord, que G''_1 est un $(k-1)$-EDT0L-système ultralinéaire. Prenons $y \in S(G'')\backslash T^*$. Il existe $\alpha \in R''^*_1 \cup R''^+_1 R''_2 (R''_3\backslash\{f\})^*$ tel que $y = \omega''_1\phi''_1(\alpha)$. Si $\alpha \in R''^+_1$, d'après la construction de ϕ' en 1), $(A'', k)\,\phi''_1(\alpha) \in N'$ et y peut s'écrire $(0, j, B, 1)y_1 \cdots (0, j, B, k-1)\,y_{k-1}$. Si $d'' \in R''_2$ avec $ntg(d'') = (0, j, B)$, alors, par définition de ϕ''_1, $z = y\phi''(d'') \in T^*(i', j', C, 2)\,V'^*$ avec $(i', j', C) = ntd(d'')$. Enfin, comme, pour tout $\alpha_3 \in (R''_3\backslash\{f\})^*$, $(i', j', C, 1)\,\phi''_1(\alpha_3) = (i', j', C, 1)\,\phi''(\alpha_3) \in N$, on en déduit que $z\phi''_1(\alpha_3) = z\phi''(\alpha_3)$ ne contient pas plus de $k-1$ non-terminaux. Donc G''_1 est bien un $(k-1)$-EDT0L-système ultralinéaire. Il nous reste à montrer que $L(G''_1) = L(G'')$. Pour ce faire, il suffit de remarquer que $u = (A'', k)\,\phi''(\alpha) \in T^*$ implique $u = 1$. De même, si $y_1 = (i, j, B, 1)\,\phi''(\alpha f) \in T^*$ avec $i \neq 0$, $\omega'\phi'(\alpha^R) = y_1(i, j, B, 1)\,y'_1$ et d'après la propriété a), $y_1 = 1$. ∎

Nous pouvons en déduire:

LEMME IV.15. *Soient* $L_1 \subseteq T_1^*$ *et* $L_2 \subseteq T_2^*$ *deux* LULT-*langages tels que les alphabets* T_1, T_2, $\{a, b\}$ *soient disjoints deux à deux. Alors pour tout entier* $k \geqslant 2$, *si* $\langle L_1L_2\rangle \in \mathrm{LULT}(2k-1)$, *l'un des deux langages* L_1, L_2 *appartient à* $\mathrm{LULT}(2k-2)$.

Démonstration. L'idée de la démonstration est que pour obtenir une dérivation de $a^nx_1x_2b^n$ avec $x_1 \in L_1$, $x_2 \in L_2$ et n suffisamment grand, il faudra, à un moment, faire apparaître en même temps des "a" et des "b" et donc que les k non-terminaux ne sont pas utilisables simultanément pour la dérivation de x_1x_2. Soit $G = (N, T, R, \phi, \omega)$ un k-EDT0L-système u.s.f.n., réduit, libre à droite qui engendre $\langle L_1L_2\rangle$ avec $N = M \times \{1,..., k\}$, $V = N \cup T$, $T = T_1 \cup T_2 \cup \{a, b\}$ et $nt(\omega) = A$. Pour $i = 1, 2$, considérons le k-EDT0L-systèm u.s.f.n. libre à droite, $G_i = (N, T_i, R, \phi_i, \omega)$ où, pour tout $d \in R$, $\phi_i(d)$ est défini sur $V_i = N \cup T_i$, par $x\phi_i(d) = h_i(x\phi(d))$, h_i étant l'homomorphisme défini sur V, par $h_i(y) = y$ si $y \in V_i$, $h_i(y) = 1$ sinon. Il est clair que, pour $i = 1, 2$, $L(G_i) = L_i$. D'autre part, comme G est réduit, $\exists p \in \mathbb{N}_+$ tel que $\forall y \in S(G)$, $| l_a(y) - l_b(y)| < p$. Prenons $w = a^nx_1x_2b^n$ avec $x_1 \in L_1$, $x_2 \in L_2$ et n "suffisamment grand". Alors, tout $\alpha \in R^*$ tel que $\omega\phi(\alpha) = w$, se factorise en $\alpha_1\alpha_2$ avec $\omega\phi(\alpha_1) = z$ et $0 < l_a(z)$, $l_b(z) < n$. Comme G est libre à droite et que $l_a(z) < n$, z appartient à $a^*NV^*b^+N^+$. Supposons qu'il existe $\alpha_2' \in R^*$ tel que $\alpha_2 = \alpha_2'a_2''$ et $z_1 = z\phi(\alpha_2') \in V^*T_1{}^+T_2^*b^*N$. Alors z_1 se factorise en $z_1'x_2z_1''$ et $x_2 \in L_2' = L_{dg}(G_2)$. Dans le cas contraire, nous avons $y = \omega\phi_1(\alpha_1) = h_1(z) \in NV_1^*N$, $y\phi_1(\alpha_2) = h_1(w) = x_1$ et pour toute factorisation de α_2 en $\alpha_2'\alpha_2''$, $y\phi_1(\alpha_2') \in V_1^*N^2 \cup T_1^*$. Donc x_1 appartient à $L_1' = \{\omega\phi_1(\beta) \in T_1^*/$pour tout préfixe β_1 de β, $\omega\phi(\beta_1) \in NV_1^*N \cup V_1^*N^2 \cup T_1^*\}$.

En utilisant la même technique que pour la démonstration du lemme II.2, on peut, alors, construire, à partir de G_1, un k-EDT0L-système u.s.f.n. $G_1' = (N_1', T_1, R_1', \phi_1', \omega_1')$ avec $V_1' = N_1' \cup T_1$, tel que $L(G_1') = L_1'$ et $S(G_1') \subseteq N_1'V_1'^*N_1' \cup V_1'^*N_1{}'^2 \cup T_1^*$ et d'après le lemme IV.14, $L_1' \in \mathrm{LULT}(2k-2)$. Nous obtenons donc $L_1L_2 = L_1'L_2 \cup L_1L_2'$, ce qui implique soit $L_1 = L_1' \in \mathrm{LULT}(2k-2)$, soit $L_2 = L_2' \in \mathrm{LULT}(2k-2)$. ∎

Revenons maintenant à la démonstration de la Proposition IV.13. Distinguons deux cas:

1) $r(L) = 2k-1$, alors $LcL \in \mathrm{LULT}(2k-1)$ qui est clos par produit et $L_1 \in \mathrm{LULT}(2k)$ qui est translatable. Donc $2k-1 \leqslant r(L_1) \leqslant 2k$. Supposons que $r(L_1)$ soit égal à $2k-1$. Si $k = 1$, ceci entraîne que L_1 est rationnel ce qui est impossible puisque L_1 est rationnellement supérieur à $\{a^nb^n/n \geqslant 0\}$. Si $k \geqslant 2$, le lemme précédent implique $L \in \mathrm{LULT}(2k-2)$ ce qui contredit le fait que $r(L) = 2k-1$. Donc $r(L_1) = 2k = r(L) + 1$.

2) Si $r(L) = 2k$, alors d'après la proposition IV.9, $r(LcL) = 2k+1$ donc $r(L_1) \geqslant 2k+1$. Montrons que $L_1 \in \mathrm{LULT}(2k+1)$. Soit $G' = (N', T, R', \phi', \omega')$ un $k+1$-EDT0L-système u.s.f.n., libre à gauche et à droite qui engendre L,

avec $N' = M' \times \{1,..., k + 1\}$ et $V' = N' \cup T$. Soit $G'' = (N'', T, R'', \phi'', \omega'')$ un $k + 1$-EDT0L-système u.s.f.n. qui engendre L avec $N'' = M'' \times \{1,..., k + 1\}$, $V'' = N'' \cup T$, $nt(\omega'') = A''$ et qui vérifie: $\forall d'' \in R''$, $\forall B \in M''$, $(B, k + 1)\, \phi''(d'') \in N''$ sauf si d'' est une règle terminale avec $ntg(d'') = B$. Supposons que $N' \cap N'' = \varnothing$ et $R' \cap R'' = \varnothing$ et posons $N = N' \cup N'' \cup \{Z\} \times \{1,..., k + 1\}$ avec $Z \notin M' \cup M''$, $R = R' \cup R'' \cup \{d_1, d_2\}$ avec $d_1, d_2 \notin R' \cup R''$ et considérons le $k + 1$-EDT0L-système ultralinéaire $G = (N, T \cup \{a, b, c\}, R, \phi, \omega')$ où ϕ est défini de la manière suivante:

Soit d une règle appartenant à $R' \cup R''$, avec $ntg(d) = B$. Si d est une règle non terminale de R', nous poserons pour tout $j \in \{1,..., k + 1\}$, $(B, j)\, \phi(d) = (B, j)\, \phi'(d)$. Si d est une règle terminale de G', $(B, 1)\, \phi(d) = (Z, 1)c$ et $\forall j \in \{2,..., k + 1\}$, $(B, j)\, \phi(d) = (Z, j)$. Si d est une règle de G'', $\forall j \in \{1,..., k + 1\}$, $(B, j)\, \phi(d) = (B, j)\, \phi''(d)$. Enfin posons $(Z, 1)\, \phi(d_1) = a(Z, 1)$, $(Z, k + 1)\, \phi(d_1) = b(Z, k + 1)$, $\forall j \in \{2,..., k\}$, $(Z, j)\, \phi(d_1) = (Z, j)$, $(Z, 1)\, \phi(d_2) = (A'', 1) \cdots (A'', k)$, $(Z, k + 1)\, \phi(d_2) = (A'', k + 1)$ et $\forall j \in \{2,..., k\}$, $(Z, j)\, \phi(d_2) = 1$.

Il est, alors, facile de vérifier que G est un $k + 1$-EDT0L-système ultralinéaire libre à droite qui engendre L_1. Donc $r(L_1) = 2k + 1 = r(L) + 1$. ∎

La proposition IV.13 n'est plus vérifiée si nous remplaçons l'opération "chevron" par l'opération "crochet". Si $r(L) = 2$, nous obtiendrons $r(L_1) = 4$ avec $L_1 = (LcL)_2$. Montrons en effet:

PROPOSITION IV.16. *Soient les langages* $L \subseteq T^*$, $L_1 = (L)_2 = \{wx\bar{w}^R / x \in L, w \in \{a, b\}^*\}$ *et* $L_2 = (LcL)_2$ *avec* $T \cap \{a, \bar{a}, b, \bar{b}, c\} = \varnothing$. *Alors* $L_1 \in$ LULT(3) *si et seulement si L est un langage algébrique linéaire et* $L_2 \in$ LULT(3) *si et seulement si L est rationnel.*

Démonstration. Supposons qu'il existe un 2-EDT0L-système u.s.f.n. $G' = (N, T', R, \phi', \omega)$ réduit, libre à droite qui engendre L_1 avec $N = M \times \{1, 2\}$, $V = N \cup T'$, $T' = T \cup \{a, \bar{a}, b, \bar{b}\}$ et $\omega = (A, 1)(A, 2)$. Considérons $G = (N, T, R, \phi, \omega)$ où ϕ est défini par: $\forall d \in R$, $\forall u \in V = N \cup T$, $u\phi(d) = h_T(u\phi'(d))$ où h_T est l'homomorphisme défini sur V' par $h_T(x) = x$ si $x \in V$, $h_T(x) = 1$ sinon. Enfin, posons $M' = \{B \in M / \forall \alpha \in R^*, (B, 1)\, \phi(\alpha) \in T^*(N \cup \{1\})\, T^*$ et $(B, 1)(B, 2) \in S(G)\}$ et pour tout $B \in M'$, G_B désignera le 1-EDT0L-système ultralinéaire $(N, T, R, \phi, (B, 1))$. Il existe $n_0 \in \mathbb{N}_+$, tel que pour tout $y \in S(G)$, $|l_a(y) - l_{\bar{a}}(y)|$ et $|l_b(y) - l_{\bar{b}}(y)|$ sont inférieurs à n_0. Donc pour tout $w = a^n b^p x \bar{b}^p \bar{a}^n$ avec $x \in L$, et n, p "suffisament grand", tout $\alpha \in R^*$ vérifiant $\omega\phi(\alpha) = w$ se factorise en $\alpha_1\alpha_2$ tel que $y_1 = \omega\phi'(\alpha_1)$ vérifie

1) $l_a(y_1), l_{\bar{a}}(y_1), l_b(y_1), l_{\bar{b}}(y_1) < n$,
2) $l_a(y_1)\, l_{\bar{a}}(y_1) + l_b(y_1)\, l_{\bar{b}}(y_1) \neq 0$.

Distinguons deux cas:

Si $l_a(y_1)\, l_{\bar{a}}(y_1) \neq 0$, y_1 est égal à $a^i(B, 1)\, \bar{b}^j \bar{a}^s(B, 2)$ avec $B = nt(y_1)$ $i, s \neq 0$ et $j < p$. Donc $(B, 1)\, \phi'(\alpha_2) \in a^+b^+T^*\bar{b}^+$ et $x = (B, 1)\, \phi(\alpha_2) \in L(G_B)$. De plus

$\omega\phi(\alpha_1) = (B, 1)(B, 2)$ et comme G est libre à droite $\forall\gamma \in R^*$, $(B, 1)\,\phi(\gamma) \in T^*(N \cup \{1\})\,T^*$, donc $B \in M'$ et $L(G_B)$ est un langage linéaire.

Si $l_b(y_1)\, l_{\bar{b}}(y_1) \neq 0$, y_1 est égal à $a^i(B, 1)\, b^j x \bar{b}^s(B, 2)$, et x appartient à $L_{dg}(G)$ qui est aussi un langage linéaire.

Donc $L = L_{dd}(G) \cup (\bigcup_{B \in M'} L(G_B))$ est un langage linéaire.

Réciproquement, si L est un langage linéaire, $L_1 = (L)_2$ est linéaire donc appartient à fortiori à LULT(3). Supposons, maintenant, que $L_2 = (LcL)_2$ appartienne à LULT(3). Alors, d'après la première partie de la proposition, LcL est linèaire et d'après Greibach (1966), L est rationnel. Enfin, si L est rationnel, LcL est encore rationnel, $L_2 = (LcL)_2$ est linéaire donc appartient à LULT(3). ∎

Si L est un LULT-langage de rang 2, LcL est de rang 3 (proposition IV.9) et nous avons $3 \leqslant r(L_2) \leqslant 4$, mais d'après la proposition précédente $r(L)$ est différent de 3, donc:

COROLLAIRE IV.17. *Soit $L \subseteq T^*$, un LULT-langage de rang 2, avec $T \cap \{a, \bar{a}, b, \bar{b}, c\} = \varnothing$. Alors le langage $(LcL)_2$ est de rang 4.*

Cependant dès que le rang de L est différent de 2, la proposition IV.13 reste vérifiée.

PROPOSITION IV.18. *Soient $L \subseteq T^*$ un LULT-langage de rang différent de 2, $a, \bar{a}, b, \bar{b}, c$ des lettres $\notin T$. Alors le langage $L_1 = (LcL)_2$ est de rang $r(L) + 1$.*

Démonstration. Distinguons deux cas:

1) Si la rang de L est impair, posons $r(L) = 2k + 1$. Comme L_1 est rationnellement supérieur au langage $\langle LcL \rangle$, nous avons, d'après la proposition IV.13, $2k + 2 = r(\langle LcL \rangle) \leqslant r(L_1) \leqslant 2k + 2$. Donc $r(L_1) = 2k + 2 = r(L) + 1$.

2) Si le rang de L est pair, posons $r(L) = 2k$ avec $k \geqslant 2$. Alors, d'après la proposition IV.9, $2k + 1 = r(LcL) \leqslant r(L_1)$. Il nous reste à montrer que L_1 appartient à LULT$(2k + 1)$. Soient G' et G'' les deux $k + 1$-EDT0L-systèmes ultralinéaires construits lors de la démonstration de la proposition IV.13. Posons $M = M' \cup M'' \cup \{Z\}$ où Z est un nouveau symbole, $N = M \times \{1,..., k + 1\}$, $R = R' \cup R'' \cup \{d_1, d_2, d_3\}$ avec $d_1, d_2, d_3 \notin R' \cup R''$. Considérons le $k + 1$-EDT0L-système ultalinéaire $G = (N, T \cup \{a, \bar{a}, b, \bar{b}, c\}, R, \phi, \omega')$ où ϕ est définie de la manière suivante:

— Pour toute règle d de G'' (non terminale de G'), $\phi(d)$ est défini comme dans la démonstration de la proposition IV.13.

— Si d est une règle terminale de G', avec $ntg(d) = B$, posons $(B, 1)\,\phi(d) = (Z, 1)$, $\forall i \in \{2,..., k\}$ $(B, i)\,\phi(d) = 1$ et $(B, k + 1)\,\phi(d) = c(Z, 2) \cdots (Z, k + 1)$.

— Enfin, posons pour tout $i \in \{1, 2\}$ et $j \in \{3,..., k + 1\}$, $(Z, j)\,\phi(d_i) = (Z, j)$ et $(Z, 1)\,\phi(d_1) = a(Z, 1)$, $(Z, 2)\,\phi(d_1) = (Z, 2)\bar{a}$, $(Z, 1)\,\phi(d_2) = \bar{b}$, $(Z, 2)\,\phi(d_2) =$

$(Z, 2)\bar{b}$, $(Z, 1)\,\phi(d_3) = 1$, $(Z, 2)\,\phi(d_3) = (A'', 1) \cdots (A'', k)$, $(Z, k+1)\,\phi(d_3) = (A'', k+1)$ et $\forall j \in \{3,\ldots, k\}$, $(Z, j)\,\phi(d_3) = 1$.

Il est alors facile de vérifier que G est un $k+1$-EDT0L-système ultralinéaire libre à droite qui engendre L_1. ▮

Comme $(Lc)^*$ est rationnellement supérieur à $LdLcLdL$ où d est un nouveau symbole, nous en déduisons:

COROLLAIRE IV.19. *Soient $L \subseteq T^*$, un* LULT-*langage de rang égal à* $2k$ *ou* $2k+1$, a, b, $\bar{a}$, $\bar{b}$, c *des lettres* $\notin T$, $L_1 = \langle (Lc)^* \rangle$ *et* $L_2 = ((Lc)^*)_2$. *Alors* $r(L_1) = r(L_2) = 2k+2$.

Soient $\mathscr{L}_1$ et $\mathscr{L}_2$ deux familles de langages. Nous dirons que $\mathscr{L}_1$ est *fermé par crochet* si $L \in \mathscr{L}_1$ implique $(L)_2 \in \mathscr{L}_1$ et $[\mathscr{L}_1]$ désignera le plus petit cône rationnel contenant $\mathscr{L}_1$, fermé par union et crochet.

Un substitution s définie sur un alphabet T est une *$\mathscr{L}_2$-substitution* si pour tout $a \in T$, $s(a) \in \mathscr{L}_2$. Posons, de manière classique, $\mathscr{L}_1 \square \mathscr{L}_2 = \{s(L_1)/L_1 \in \mathscr{L}_1$ et s est une $\mathscr{L}_2$-substitution$\}$ et Fin $=$ la famille des langages finis.

La famille des langages ultralinéaires d'ordre p, notée ULT(p) a été définie (Boasson, Crestin et Nivat, 1973) par induction en posant ULT(1) $=$ Lin et ULT($p+1$) $=$ [Fin $\square$ ULT(p)]. Nous avons alors:

PROPOSITION IV.20. *Pour tout* $p \in \mathbb{N}_+$, ULT(p) *est inclus dans* LULT($2p$) *et* $\forall k \in \{1,\ldots, 2p\}$, *il existe dans* ULT($p$), *un* LULT-*langage de rang* k.

Démonstration. Raisonnons par induction sur p. Si $p = 1$, nous avons ULT(1) $=$ LULT(2) $= \mathscr{L}$in. Supposons la propriètè vraie pour p. Alors Fin $\square$ Ult(p) est inclus dans LULT($2p+1$) qui est fermé par produit et ULT($p+1$) est inclus dans LULT($2p+2$) qui est fermé par crochet. Enfin, soit $L \subseteq T^*$ un langage appartenant à ULT(p), qui est un LULT-langage de rang $2p$, a, b, c des lettres $\notin T$. Les langages $L_1 = \langle LcL \rangle$ et $L_2 = \langle LcLcLcL \rangle$ appartiennent à ULT($p+1$) et d'après la proposition IV.13, $r(L_1) = 2p+1$ et $r(L_2) = 2p+2$. ▮

La proposition précédente entraîne immédiatement que tout cône rationnel contenant les langages ultralinéaires et inclus dans LULT est non principal. En particulier, comme $\mathscr{F}_\sigma(\mathscr{L}$in), la famille des langages quasirationnels est incluse dans LULT, nous avons:

COROLLAIRE IV.21. *Il n'existe pas de cône rationnel principal inclus dans la famille des langages quasirationnels et contenant tous les langages ultralinéaires.*

V. Calcul du rang de la Substitution marquée

Soient $L' \subseteq T'^*$ et $L'' \subseteq T''^*$, deux langages non vides définis sur des alphabets disjoints et τ, la substitution définie sur T' par $\tau(a) = aL''$, $\forall a \in T'$. Alors $\tau(L')$, l'image de L' par la substitution τ, notée $s(L', L'')$ est appelée la substitution marquée de L'' dans L'. Cette opération est très "representative" de la substitution et permet, en particulier, de construire des générateurs pour le cône rationnel $\mathscr{L}_1 \square \mathscr{L}_2$ des images de langages de $\mathscr{L}_1$ dans une $\mathscr{L}_2$-substitution, $\mathscr{L}_1$ et $\mathscr{L}_2$ étant deux cônes rationnels principaux (cf. Ginsburg, 1975). C'est aussi en utilisant cette opération que S. Greibach (1970) a montré que si $\mathscr{L}$ est un cône rationnel clos par union, $\mathscr{L}$ est clos par substitution si et seulement si $\mathscr{L} \square \mathscr{L}$ est clos par substitution. Nous allons montrer, dans cette section, que pour deux LULT-langages L', L'' définis sur des alphabets disjoints, le rang du langage $s(L', L'')$ ne dépend que de $r(L')$ et $r(L'')$. Montrons d'abord:

Lemme V.1. *Soient les langages non vides $L' \subseteq T'^*$, $L'' \subseteq T''^*$ avec $T' \cap T'' = \varnothing$ et $L = s(L', L'')$. Alors, si $L' \in \mathrm{LULT}(k')$ et $L'' \in \mathrm{LULT}(2k'' - 1)$, L appartient à $\mathrm{LULT}(k' + 2k'' - 2)$.*

Démonstration. Soit $G' = (N', T', R', \phi', \omega')$ un k-EDT0L-système u.s.f.n. (libre à droite) qui engendre L' avec $N' = M' \times \{1,..., k\}$, $V' = N' \cup T'$, $nt(\omega') = A'$ et $k' = 2k$ ($k' = 2k - 1$). On peut supposer, sans nuire à la généralité de la démonstration, que pour tout règle linéaire d' de G', il existe $i \in \{1,..., k\}$ tel que $(B', i)\,\phi'(d') \in N'T' \cup T'N'$ et pour tout $j \in \{1,..., k\} \setminus \{i\}$, $(B', j)\,\phi'(d') \in N'$ où $B' = ntg(d')$. Soient $G''_d = (N''_d, T'', R''_d, \phi''_d, \omega''_d)$ et $G''_g = (N''_g, T'', R''_g, \phi''_g, \omega''_g)$ des k''-EDT0L-système u.s.f.n., respectivement libre à droite, libre à gauche qui engendrent L'' avec $N''_d = M''_d \times \{1,..., k''\}$, $N''_g = M''_g \times \{1,..., k''\}$, $A''_d = nt(\omega''_d)$, $A''_g = nt(\omega''_g)$, tels que les ensembles M', M''_d, M''_g, R', R''_d, R''_g soient disjoints deux à deux. Posons $T = T' \cup T''$, $N = N' \cup N' \times (M''_g \cup M''_d \cup N''_d) \cup T' \times N' \times N''_g$, $R = R' \cup R''_d$ et $V = N \cup T$. Pour tout $X \in N' \cup T' \times N'$, l'homomorphisme h_X est défini par $h_X(a) = a$, $\forall a \in T$ et $h_X(Y) = (X, Y)$ pour tout $Y \in N''_d \cup N''_g$. Considérons, alors, le système $G = (N, T, R, \phi, \omega')$ où ϕ est défini de la manière suivante:

— Pour toute règle non linéaire d' de G', $\phi(d')$ est égal à $\phi'(d')$ sur N'.

— Soit d' une règle linéaire de G' avec $B' = ntg(d')$, $C' = ntd(d')$ et $(B', i_0)\,\phi'(d') = y \in N'T' \cup T'N'$. Si $y = a(C', i_0)$, posons $(B', i_0)\,\phi(d') = ah_{(C', i_0)}(\omega''_d)$ et $(B', j)\,\phi(d') = (C', j, A''_d)$ pour tout $j \in \{1,..., k\} \setminus \{i_0\}$. Si, par contre $y = (C', i_0)a$, posons $(B', i_0)\,\phi(d') = h_{(a, C', i_0)}(\omega''_g)$ et $(B', j)\,\phi(d') = (C', j, A''_g)$, pour tout $j \in \{1,..., k\} \setminus \{i_0\}$.

— Soit d'' une règle non terminale de $R''_d \cup R''_g$ avec $B'' = ntg(d'')$ et $C'' = ntd(d'')$. Alors, pour tout $X \in N'$, posons $(X, B'')\,\phi(d'') = (X, C'')$. Si $d'' \in R''_d$, $\forall X \in N'$ et $\forall j \in \{1,..., k''\}$, posons $(X, B'', j)\,\phi(d'') = h_X((B'', j)\,\phi''_d(d''))$ et si $d'' \in R''_g$, $\forall Y \in T' \times N'$ et $\forall j \in \{1,..., k''\}$, posons $(Y, B'', j)\,\phi(d'') = h_y((B'', j)\,\phi''_g(d''))$.

— Enfin, soit d'' une règle terminale de $R''_d \cup R''_g$ avec $B'' = ntg(d'')$. Alors, pour tout $X \in N'$, posons $(X, B'')\,\phi(d'') = X$. Si $d'' \in R''_d$, $\forall X \in N'$, $(X, B'', k'')\,\phi(d'') = X$ et $(X, B'', j)\,\phi(d'') = 1$, $\forall j \in \{1,..., k'' - 1\}$. Si $d'' \in R''_g$, $\forall a \in T'$, $\forall X \in N'$, $(a, X, B'', 1)\,\phi(d'') = Xa$ et $(a, X, B'', j)\,\phi(d'') = 1$, $\forall j \in \{2,..., k''\}$.

Nous laissons, au lecteur, le soin de vérifier que G est un $(k + k'' - 1)$-EDT0L-système ultalinéaire qui engendre L et qui est libre à droite si G' est libre à droite. Donc L appartient à LULT$(k' + 2k'' - 2)$. ▮

En particulier, si L'' est un langage rationnel, $L = s(L', L'')$ appartient à LULT(k'), ce qui implique $r(L) = r(L')$. Considérons, maintenant, le cas où L' est rationnel. Si $L' = \{1\}$, alors $L = \{1\}$ et $r(L) = 1$. Si $L' \subseteq T' \cup \{1\}$ et $L' \cap T' \neq \varnothing$, $r(L) = r(L'')$. Enfin si $L' \cap T'T'^{+}$ est non vide, il est clair que L est rationnellement supérieur à $L''cL''$ avec $c \notin T''$. Donc si $r(L'') = 2k$ ou $2k + 1$, nous avons $r(L) \geqslant r(L''cL'') = 2k + 1$, et comme LULT$(2k + 1)$ est clos par substitution dans un rationnel, $r(L) = 2k + 1$. Nous supposerons, dans la suite, que L' et L'' sont des langages non rationnels. Il s'agit, maintenant de trouver une borne inférieure, pour le rang du langage $s(L', L'')$. Pour cela, nous aurons besoin d'un résultat concernant les k-EDT0L-systèmes u.s.f.n. engendrant des langages de rang quelconque inférieur ou égal à $2k$.

LEMME V.2. *Soit $G = (N, T, R, \phi, \omega)$ un k-EDT0L-systèmes u.s.f.n. avec $V = N \cup T$, qui engendre un langage L de rang $2k' + 1$ avec $1 \leqslant k' \leqslant k - 1$. Alors $\forall p \in \mathbb{N}_+$, $\exists y \in L$ tel que pour tout $\alpha \in R^*$ vérifiant $\omega\phi(\alpha) = y$, il existe une factorisation de α en $\alpha_1\alpha_2$, telle que $y_1 = \omega\phi(\alpha_1)$ s'écrive: $X_1u_1 \cdots X_{k'}u_{k'}X_{k'+1}$ avec $\forall i \in \{1,..., k'\}$, $u_i \in T^pT^*$ et $\forall j \in \{1,..., k' + 1\}$, $X_j \in V^*NV^*$.*

Démonstration. Raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $\forall y \in L$, $\exists \alpha \in R^*$ tel que $\omega\phi(\alpha) = y$ et pour toute factorisation $\alpha = \alpha_1\alpha_2$, $y_1 = \omega\phi(\alpha_1)$ s'écrive $u_1X_1 \cdots u_{k'}X_{k'}u_{k'+1}$ avec $\forall i \in \{1,..., k' + 1\}$, $u_i \in T^*$ et $\forall j \in \{1,..., k'\}$, $X_j \in V^* \backslash V^*T^pV^*$. Montrons, que dans ce cas, on peut construire un k'-EDT0L-système u.s.f.n. qui engendre L. Posons $N = M \times \{1,..., k\}$, $nt(\omega) = A$, $Z = \{y \in NV^* \cap V^*N / l(y) \leqslant kp\}$, $M' = \{(y_1, ..., y_{k'}) \in Z^{k'} / y_1 \cdots y_{k'} = (B, 1)\, u_1 \cdots u_{k-1}(B, k)$ avec $B \in M$ et $\forall i \in \{1,..., k - 1\}$, $u_i \in T^*\}$, $N' = (\{A'\} \cup M') \times \{1,..., k'\}$ où A' est un nouveau symbole, $V' = N' \cup T$ et $I = \{(i_1, ..., i_{k'}) \in \mathbb{N}^{k'} / i_1 < i_2 < \cdots < i_{k'} = k\}$. Nous désignerons respectivement par R'_0, R'_1 et R'_2 les ensembles $\{r_{\bar{\imath}} / \bar{\imath} \in I\}$, $\{(d, \bar{y}) / d$ est une règle terminale de G, $\bar{y} = (y_1, ..., y_{k'}) \in M'$ et $ntg(d) = nt(y_1)\}$ et $\{(d, \bar{y}) / d$ est une règle linéaire de G, $\bar{y} = (y_1, ..., y_{k'}) \in M'$, $ntg(d) = nt(y_1)$ et $\forall i \in \{1,..., k'\}$, $y_i\phi(d) \in T^*ZT^*\}$. Pour $d \in R$ et $\bar{y} = (y_1, ..., y_{k'}) \in M'$, notons $K(d, \bar{y})$ l'ensemble $\{\bar{\imath} = (i_1, ..., i_{k'}) \in I / \forall j \in \{1,..., k'\}, l_N((y_1 \cdots y_j)\,\phi(d)) \in \{0, i_1, ..., i_{k'}\}\}$.

Considérons, alors, $G' = (N', T, R', \phi', \omega')$ le k'-EDT0L-système u.s.f.n. avec $nt(\omega') = A'$, $R' = R'_0 \cup R'_1 \cup R'_2 \cup R'_3$, R'_3 étant égal à $\{(d, \bar{y}, \bar{\imath}) \in R \times M' \times I / d$ est une règle de transition de G, $\bar{y} = (y_1, ..., y_k)$ avec $ntg(d) = nt(y_1)$ et $\bar{\imath} \in K(d, \bar{y})\}$ et où ϕ' est défini de la manière suivante:

Soit $r_{\bar{\imath}} \in R_0'$ avec $\bar{\imath} = (i_1, ..., i_{k'})$. Alors, $\forall j \in \{1, ..., k'\}$, posons $y_j = (A, i_{j-1} + 1) \cdots (A, i_j)$ avec $i_0 = 0$ et $(A', j)\, \phi'(r_{\bar{\imath}}) = (\bar{y}, j)$ avec $\bar{y} = (y_1, ..., y_{k'})$.

Soit $(d, \bar{y}) \in R_1' \cup R_2'$ avec $\bar{y} = (y_1, ..., y_{k'})$ et $ntg(d) = nt(y_1) = B$. Si d est une règle terminale, posons $\forall j \in \{1, ..., k'\}$, $(\bar{y}, j)\, \phi'(d, \bar{y}) = y_j \phi(d)$. Si d est une règle linéaire, $\forall j \in \{1, ..., k'\}$, $y_j \phi(d)$ peut se factoriser en $u_j z_j v_j$ avec $u_j v_j \in T^*$ et $z_j \in Z$. Posons, alors, $\bar{z} = (z_1, ..., z_{k'})$ et $\forall j \in \{1, ..., k'\}$, $(\bar{y}, j)\, \phi'(d, \bar{y}) = u_j(\bar{z}, j)\, v_j$.

Soit $(d, \bar{y}, \bar{\imath}) \in R_3'$ avec $\bar{y} = (y_1, ..., y_{k'})$, $ntg(d) = nt(y_1) = B$, $ntd(d) = C$, $\bar{\imath} = (i_1, ..., i_{k'})$ et $\forall j \in \{1, ..., k'\}$, $y_j \phi(d) = z_j'$. Pour tout $j \in \{1, ..., k'\}$, nous définirons z_j comme l'unique sous-mot de $z' = z_1' \cdots z_{k'}'$ appartenant à $(C, i_{j-1} + 1)\, V^* \cap V^*(C, i_j)$ avec $i_0 = 0$. Posons, alors, $\bar{z} = (z_1, ..., z_{k'})$ et pour tout $j \in \{1, ..., k'\}$, $(\bar{y}, j)\, \phi'(d, \bar{y}, \bar{\imath})$ est l'unique mot z_j'' appartenant à $T^* \cup \{(\bar{z}, j) / j \in \{1, ..., k'\}\}^*$ tel que $g(z_j'') = z_j'$ où g est l'homomorphisme défini sur V' par $g(\bar{z}, j) = z_j$, $\forall j \in \{1, ..., k'\}$, $g(x) = x$ ailleurs.

Par construction, $L(G')$ est inclus dans L. D'autre part, pour tout $y \in L(G)$, considérons $\alpha \in R^*$ vérifiant l'hypothèse posée au début de la démonstration et $y' = \omega\phi(\alpha')$ où α' est un facteur initial de α. Alors, y' se factorise en $u_1 y_1' \cdots y_{k'}' u_{k'+1}'$ avec $u_1 u_2 \cdots u_{k'+1}' \in T^*$ et $\forall j \in \{1, ..., k'\}$, $y_j' \in Z$. Comme les règles de transition de G' permettent de regrouper les non-terminaux, on peut montrer par récurrence que $u_1(\bar{y}', 1) \cdots (\bar{y}', k')\, u_{k'+1}' \in S(G')$ avec $\bar{y}' = (y_1, ..., y_{k'}')$. Il est, alors facile d'en déduire que $L = L(G')$ et donc le rang de L est inférieur à $2k' + 1$, d'où la contradiction. ∎

En fait, c'est le résultat suivant que nous utiliserons explicitement pour la démonstration du lemme V.5. Ce résultat se déduit immédiatement du lemme précédent.

Corollaire V.3. *Soit $G = (N, T, R, \phi, \omega)$ un k-EDT0L-système u.s.f.n. qui engendre un langage L de rang $2k' + 1$ avec $k' \geq 1$. Alors, $\forall p \in \mathbb{N}_+$, $\exists y \in L$ tel que pour tout $\alpha \in R^*$ vérifiant $\omega\phi(\alpha) = y$, il existe une factorisation $\alpha = \alpha_1\alpha_2\alpha_3$ telle que $y_1 = \omega\phi(\alpha_1)$ puisse s'écrire $u_1(B, i_1) \cdots u_{k'+1}(B, i_{k'+1})\, u_{k'+2}$ avec $\forall s \in \{1, ..., k' + 1\}$, $l_N((B, i_s)\, \phi(\alpha_2)) > 0$ et $\exists t \in \{1, ..., k' + 1\}$, $l((B, i_t)\, \phi(\alpha_2)) > p$.*

Considérons, maintenant, un k-EDT0L-système u.s.f.n., réduit $G = (N, T, R, \phi, \omega)$ qui engendre $L = s(L', L'')$ avec $L' \subseteq T'^*$, $L'' \subseteq T''^*$, $T' \cap T'' = \varnothing$ et $T = T' \cup T''$. Montrons qu'à partir de G, nous pouvons construire un k-EDT0L-système qui engendre L'' en étant "structurellement très proche" du système G. De façon plus précise, posons $N = M \times \{1, ..., k\}$, $V = N \cup T$, $A = nt(\omega)$, $M'' = \{1, ..., k + 1, \bar{1}, ..., \bar{k}\} \times \{0, ..., k, \bar{1}, ..., \bar{k}\} \times M$ et $N'' = M'' \times \{1, ..., k\}$. L'homomorphisme g, projection de N'' dans N, est défini sur $V'' = N'' \cup T$ par $g(a'') = a''$, $\forall a'' \in T''$ et $g(s, t, B, i) = (B, i)$, $\forall (s, t, B, i) \in N''$. Enfin, l'homomorphisme h est défini sur $V = N \cup T$ par $h(a) = 1$, $\forall a \in T$ et $h(b) = b$, $\forall b \in N$. Nous pouvons, alors, énoncer:

Lemme V.4. *Il existe un k-EDT0L-système u.s.f.n. $G'' = (N'' \cup \{\omega''\}, T'',$*

R'', ϕ'', ω'') engendrant L'' et un homomorphisme strictement alphabétique θ de R''^* dans R^* tels que: Si $y_1xy_2 = (B, i)\,\phi(\alpha)$ avec $(B, i) \in N$, $\alpha \in R^*$, $y_1 \in V^*T'$, $x \in T''^*$ et $y_2 \in T'V^*$, alors il existe $\alpha'' \in R''^*$ tel que:

a) $\theta(\alpha'') = \alpha$ *et* $(\bar{\imath}, \bar{\imath}, B, i)\,\phi''(\alpha'') = h(y_1)\,xh(y_2)$,

b) *Si* $\alpha'' = \alpha_1''\alpha_2''$ *et* $(\bar{\imath}, \bar{\imath}, B, i)\,\phi''(\alpha_1'') = z_1''u''z_2''$ *avec* z_1'', $z_2'' \in N''^*$ *et* $u'' \in T''V''^* \cap V''^*T''$, *alors* $(B, i)\,\phi(\theta(\alpha_1'')) = z_1g(u'')\,z_2$ *avec* $h(z_1) = g(z_1'')$ *et* $h(z_2) = g(z_2'')$.

Démonstration. Nous ne donnerons qu'une idée de la construction du système G'', la démonstration complète de ce lemme demandant, malheureusement, trop de place. Ceci est dû au fait qu'il faut envisager tous les cas possibles.

Nous allons définir simultanément R'', ϕ'' et θ.

Pour tout $X = (B, i) \in N$, r_X sera une règle de G'', donc $r_X \in R''$ et nous poserons $\omega''\phi''(r_X) = (\bar{\imath}, \bar{\imath}, B, i)$ et $\theta(r_X) = 1$.

Soient d une règle non terminale de G avec $ntg(d) = B$, $ntd(d) = C$ et (p, q, B) un élément de M'' avec $p = s$ ou $\bar{s}$, $q = t$ ou $\bar{t}$, $t > s$. Alors, $\forall i \in \{1,\dots, k\}$, nous poserons $(p, q, B, i)\,\phi''(d, p, q) = t_{p,q}oh((B, i)\,\phi(d))$ où $t_{p,q}$ est l'homomorphisme défini sur V par $t_{p,q}(X) = (p, q, X) = (p, q, D, i)$, $\forall X = (D, i) \in N$, $t_{p,q}(a) = a$, $\forall a \in T$ et $\theta(d, p, q) = d$.

Soit d une règle terminale de G avec $ntg(d) = B$. Alors, $\forall i, j, s \in \{0,\dots, k + 1\}$ tels que $(i, j, B, s) \in N''$, nous poserons $(i, j, B, s)\,\phi''(d, i, j) = 1$ et $\theta(d, i, j) = d$.

Soient d une règle linéaire de G avec $ntg(d) = B$, $\forall s \in \{1,\dots, k\}$, $(B, s)\,\phi(d) = u_s(C, s)\,v_s$ et deux entiers i, j appartenant à $\{1,\dots, k\}$, $i \leqslant j$ tels que $\forall s \in \{i,\dots, i\}$, $u_sv_s \in T''^*$. Alors, nous poserons $\theta(d, i, j) = d$, $\forall s \in \{i,\dots, j\}$, $(i, j, B, s)\,\phi''(d, i, j) = u_s(i, j, C, s)\,v_s$ et $\forall s \in \{1,\dots, i - 1\} \cup \{j + 1,\dots, k\}$, $(i, j, B, s)\,\phi''(d, i, j) = (i, j, C, s)$.

Distinguons trois cas:

a) Le mot v_i se factorise en $v_i'v_i''$ avec $v_i' \in T^*T'$ et $v_i'' \in T''^*$. Alors, posons $\theta(d, \bar{\imath}, j) = d$, $(\bar{\imath}, j, B, i)\,\phi''(d, \bar{\imath}, j) = (i + 1, j, C, i)\,v_i''$, $\forall s \in \{i + 1,\dots, j\}$, $(\bar{\imath}, j, B, s)\,\phi''(d, \bar{\imath}, j) = u_s(i + 1, j, C, s)\,v_s$ et $\forall s \in \{1,\dots, i - 1\} \cup \{j + 1,\dots, k\}$, $(\bar{\imath}, j, B, s)\,\phi''(d, \bar{\imath}, j) = (i + 1, j, C, s)$.

b) Le mot u_iv_i appartient à T''^*. Alors, posons $\theta(d, \bar{\imath}, j) = d$, $(\bar{\imath}, j, B, i)\,\phi''(d, \bar{\imath}, j) = (\bar{\imath}, j, C, i)\,v_i$, $\forall s \in \{i + 1,\dots, j\}$, $(\bar{\imath}, j, B, s)\,\phi''(d, \bar{\imath}, j) = u_s(\bar{\imath}, j, C, s)\,v_s$ et $\forall s \in \{1,\dots, i - 1\} \cup \{j + 1,\dots, k\}$, $(\bar{\imath}, j, B, s)\,\phi''(d, \bar{\imath}, j) = (\bar{\imath}, j, C, s)$.

c) Le mot v_i appartient à T''^* et u_i se factorise en $u_i'u_i''$ avec $u_i' \in T^*T'$ et $u_i'' \in T''^*$. Alors, posons $\theta(d, \bar{\imath}, j) = d$ et définissons $\phi''(d, \bar{\imath}, j)$ comme au point précédent. Posons, aussi $\theta(\bar{d}, \bar{\imath}, j) = d$, $(\bar{\imath}, j, B, i)\,\phi''(\bar{d}, \bar{\imath}, j) = u_i''(i, j, C, i)\,v_i$, $\forall s \in \{i + 1,\dots, j\}$, $(\bar{\imath}, j, B, s)\,\phi''(\bar{d}, \bar{\imath}, j) = u_s(i, j, C, s)\,v_s$ et $\forall s \in \{1,\dots, i - 1\} \cup \{j + 1,\dots, k\}$, $(\bar{\imath}, j, B, s)\,\phi''(\bar{d}, \bar{\imath}, j) = (i, j, C, s)$.

Soient d une règle de transition de G avec $ntg(d) = B$, deux entiers $i, j \in \{1,\dots, k\}$ avec $i \leqslant j$. Prenons $i' = 1 + l(((B, 1) \cdots (B, i - 1))\,\phi(d))$, $j' = k -$

$l(((B,j+1) \cdots (B,k)\phi(d))$ et $i'' = l((B,i)\phi(d))$. Nous poserons, alors, $\theta(d,i,j) = d$, $\forall s \in \{1,\ldots,k\}$, $(i,j,B,s)\phi''(d,i,j) = t_{i',j'}((B,s)\phi(d))$ et $\forall r \in \{i',\ldots,i'+i''-1\}$, $\theta(d,i,j,r) = d$ et $(i,j,B,s)\phi''(d,i,j,r) = t_{r,j'}((B,s)\phi(d))$.

Pour toute règle d non terminale de G avec $ntg(d) = B$ et pour tout $i \leqslant j$, $i,j \in \{1,\ldots,k\}$, on pourra définir de manière symétrique les règles de G'' qui "s'appliquent" aux non-terminaux $(i,\bar{j},B,s)$ avec $s \in \{1,\ldots,k\}$. Ceci permet aussi de définir les règles de G'' qui s'appliquent aux non-terminaux $(\bar{i},\bar{j},B,s)$ avec $i < j$ et $s \in \{1,\ldots,k\}$. Il reste à définir les règles de G'' qui concernent les non-terminaux $(\bar{i},\bar{i},B,s)$ avec $i,s \in \{1,\ldots,k\}$.

Soient d une règle de transition de G avec $ntg(d) = B$ et $i \in \{1,\ldots,k\}$. Posons $i' = l(((B,1) \cdots (B,i-1)\phi(d)) + 1$ et $i'' = l((B,i)\phi(d))$. Pour tout $j', j'' \in \{i',\ldots,i'+i''-1\}$ avec $j' \leqslant j''$, posons $\theta(d,\bar{i},\bar{i},j',j'') = d$ et $\forall s \in \{1,\ldots,k\}$, $(\bar{i},\bar{i},B,s)\phi''(d,\bar{i},\bar{i},j',j'') = t_{\bar{j}',\bar{j}''}((B,s)\phi(d))$.

Soient un entier $i \in \{1,\ldots,k\}$ et d une règle linéaire de G avec $ntg(d) = B$ et $\forall s \in \{1,\ldots,k\}$, $(B,s)\phi(d) = u_s(C,s)v_s$. Posons $\theta(d,\bar{i},\bar{i}) = d$, $(\bar{i},\bar{i},B,s)\phi''(d,\bar{i},\bar{i}) = (\bar{i},\bar{i},C,s)$, $\forall s \in \{1,\ldots,k\}$. Si u_i se factorise en $u_i'u_i''$ avec $u_i' \in T^*T'$ et $u_i'' \in T''^*$, nous poserons $\theta(d,\bar{i},\bar{i},i) = d$, $(\bar{i},\bar{i},B,i)\phi''(d,\bar{i},\bar{i},i) = u_i''(i,\bar{i},C,i)$ et $\forall s \in \{1,\ldots,i-1, i+1,\ldots,k\}$, $(\bar{i},\bar{i},B,s)\phi''(d,\bar{i},\bar{i},i) = (i,\bar{i},C,s)$. Si $v_i = v_i'v_i''$ avec $v_i' \in T''^*$ et $v_i'' \in T'T^*$, on définit de manière symétrique une règle de G''. Si, à la fois, u_i et v_i se factorisent comme ci-dessus, on définit une règle de G'' qui conjuge l'effet des deux règles définies ci-dessus. Enfin, si u_i se factorise en $u_i'u_i''u_i'''$ avec $u_i' \in T^*T'$, $u_i'' \in T''^*$ et $u_i''' \in T'T^*$, posons $\theta(d,\bar{i},\bar{i},u_i'',i+1) = d$, $(\bar{i},\bar{i},B,i)\phi''(d,\bar{i},\bar{i},u_i'',i+1) = u_i''(i+1,i,C,i)$ et $\forall s \in \{1,\ldots,i-1,i+1,\ldots,k\}$, $(\bar{i},\bar{i},B,s)\phi''(d,\bar{i},\bar{i},u_i'',i+1) = (i+1,i,C,s)$. Nous faisons une construction symétrique pour tout sous-mot de v_i appartenant à $T'T''^*T'$.

Essayons, maintenant, d'expliquer, grosso modo, ce que représentent les marquages des non-terminaux que l'on fait dans le système G''. Si $X = (p,q,B,s)$ avec $p = i$ ou $\bar{i}$, $q = j$ ou $\bar{j}$, $s > j$ ou $s < i$, alors X n'est plus "utile", c'est-à-dire que pour tout $\alpha'' \in R''^*$, $X\phi(\alpha'') \in \mathbb{N}''^*$. Si $X = (i,j,B,s)$ avec $i \leqslant s \leqslant j$, ou $X = (\bar{i},j,B,s)$ avec $i < s \leqslant j$, ou $X = (i,\bar{j},B,s)$ avec $i \leqslant s < j$ ou $X = (\bar{i},\bar{j},B,s)$ avec $i < s < j$ alors on ne peut "simuler" dans G'' à partir de X que des dérivations dans G à partir de (B,s) qui ne font apparaître aucune lettre de T''. Plus précisément, $X\phi''(\alpha'') = w'' \in T''^*$ si et seulement si $(B,s)\phi(\theta(\alpha'')) = w''$. Si $X = (\bar{i},j,B,i)$ avec $i \leqslant j$, ou $X = (\bar{i},\bar{j},B,i)$ avec $i < j$, $X\phi''(\alpha'') = w'' \in T''^*$ si et seulement si $(B,i)\phi(\theta(\alpha'')) = w'w''$ avec $w' \in T^*T'$. Si $X = (i,\bar{j},B,j)$ avec $i \leqslant j$, ou $X = (\bar{i},\bar{j},B,j)$ avec $i < j$, on a un résultat symétrique. Enfin, si $X = (\bar{i},\bar{i},B,i)$, $X\phi''(\alpha'') = w'' \in T''^*$ si et seulement si $(B,i)\phi(\theta(\alpha'')) = w_1'w''w_2'$ avec $w_1' \in T^*T'$ et $w_2' \in T'T^*$. A l'aide de ces considérations, on peut, alors montrer que le système G'' vérifie bien les propriétés énoncées dans ce lemme. ▮

Considérons, maintenant, les trois LULT-langages $L' \subseteq T'^*$, $L'' \subseteq T''^*$, $L = s(L',L'')$ avec $T' \cap T'' = \varnothing$, $r(L') = 2k'+1$ et $r(L'') = 2k''$. Montrons que le rang de L est supérieur ou égal à $2k' + 2k'' + 1$. Soit, en effet, $G = (N, T, R, \phi, \omega)$ un k-EDT0L-système u.s.f.n., réduit qui engendre L avec $T = T' \cup T''$, $N = M \times \{1,..., k\}$ et $A = nt(\omega)$. Considérons le k-EDT0L-système ultralinéaire $G' = (N, T', R, \phi', \omega)$ qui est défini par: $\forall X \in V' = N \cup T'$, $\forall d \in R$, $X\phi'(d) = h'(X\phi(d))$ où h' est l'homomorphisme défini sur V par $h'(a'') = 1$, $\forall a'' \in T''$, $h'(X) = X$, $\forall X \in V \backslash T''$. Il est clair que le système G' est réduit, sous forme normale et engendre L'. Le corollaire V.3 peut, alors, s'appliquer à ce système et il existe $y \in L'$ qui vérifie les propriétés énoncées dans ce corollaire avec $p = 2k'' + 2$. Soit G'', le k-EDT0L-système ultralinéaire construit à partir de G, comme au lemme précédent, qui engendre L''. Etant donné que L'' est de rang $2k''$, il existe $x \in L''$ vérifiant la propriété suivante:

(*) Pour tout $r_X \in R''$, $\alpha'' \in R''^*$ tels que $\omega''\phi''(r_X\alpha'') = x$, il existe une factorisation $\alpha'' = \alpha_1''\alpha_2''$ telle que $x'' = \omega''\phi''(r_X\alpha_1'')$ vérifie: soit $l_{N''}(x'') > k''$, soit $l_N(x'') = k''$ et $x'' \in T''V''^*T''$.

Le mot $z = s(\{y\}, \{x\})$ appartient à $L = s(L', L'')$. Soit $\alpha \in R^*$ tel que $\omega\phi(\alpha) = z$. Comme $\omega\phi'(\alpha) = y$, il existe une factorisation de α en $\alpha_1\alpha_2\alpha_3$ telle que, pour $y_1 = \omega\phi'(\alpha_1)$ avec $nt(y_1) = B$, il existe des entiers $1 \leqslant i_1 \leqslant \cdots \leqslant i_{k'+1} \leqslant k$, $(B, i_j)\,\phi'(\alpha_2) \in V'^*NV'^*$, $\forall j \in \{1,..., k' + 1\}$ et il existe t tel que $l(u') = p = 2k'' + 2$ avec $u' = (B, i_t)\,\phi'(\alpha_2)$. Considérons le mot $u = (B, i_t)\,\phi(\alpha_2)$ et distinguons deux cas:

1) $l_N(u)$ est supérieur à k'. Dans ce cas, le mot $\omega\phi(\alpha_1\alpha_2)$ contient au moins $k' + k'' + 1$ occurrences de non-terminaux, donc $k \geqslant k' + k'' + 1$.

2) $l_N(u)$ est inférieur ou égal à k''. Comme le mot u', obtenu à partir de u en effaçant les lettres de T'', est de longueur $2k'' + 2$, u possède un facteur v qui appartient à $T'T''^*T'$. Mais v est aussi un facteur de $\omega\phi(\alpha_1\alpha_2\alpha_3) = z = s(\{y\}, \{x\})$, donc v se factorise en $a_1'xa_2'$ avec a_1', $a_2' \in T'$. Il est, alors clair, d'après le choix de x, le lemme V.4 et le fait que u contienne encore au moins une occurrence d'un élément de N, qu'il existe une factorisation de α_2 en $\alpha_4\alpha_5$ telle que $\omega\phi(\alpha_1\alpha_4)$ contienne au moins $k' + k'' + 1$ occurrences de non-terminaux, donc $k \geqslant k' + k'' + 1$.

Nous venons de montrer que tout k-EDT0L-système u.s.f.n. G engendrant L est tel que $k \geqslant k' + k'' + 1$, donc:

LEMME V.5. *Soient L' et L'', deux* LULT-*langages définis sur des alphabets disjoints avec $r(L') = 2k' + 1$ et $r(L'') = 2k''$. Alors le rang de $L = s(L', L'')$ est supérieur ou égal à $2k' + 2k'' + 1$.*

En raisonnant de façon analogue, on peut obtenir, dans le cas où $r(L') = 2k'$, un résultat similaire au corollaire V.3, ce qui permet, alors, d'établir que, si $r(L'') = 2k''$, le rang de L est supérieur ou égal à $2k' + 2k''$. En utilisant ce résultat et les lemmes V.1 et V.5, nous pouvons en déduire immédiatement la proposition du rang de la substitution marquée:

PROPOSITION V.6. *Soient L', L'' des* LULT-*langages définis sur des alphabets disjoints et $L = s(L', L'')$, le langage obtenu par la substitution marquée de L'' dans L'. Alors, si le rang de L' est égal à k' et le rang de L'' est égal à $2k''$ ou $2k'' + 1$, le rang de L est égal à $k' + 2k''$.*

En particulier, pour tout LULT-langage non rationnel L, le langage $L_1 = s(L, \bar{L})$ où $\bar{L}$ est la "recopie" de L sur un alphabet disjoint, a un rang supérieur à celui de L, donc $L_1 \notin \mathscr{C}(L)$ et:

COROLLAIRE V.7. *Si L est un* LULT-*langage non rationnel, le cône rationnel engendré par L n'est pas fermé par substitution.*

On en déduit un résultat qui découle aussi de la proposition IV.13:

COROLLAIRE V.8. *Aucun générateur du cône rationnel des langages algébriques n'appartient à* LULT.

VI. EDT0L-SYSTÈMES LINÉAIRES

Soit $G = (N, T, R, \phi, \omega)$ un k-EDT0L-système ultralinéaire réduit. Pour tout $x \in S(G)$, $l_N(x) \leqslant k$, donc $\forall B \in N$, $\forall d \in R^*$, $y = B\phi(d)$ contient au maximum une occurrence de B. Cependant, grâce aux règles de transition, il se peut que y se factorise en $y_1 B y_2$ avec $l_N(y_1 y_2) > 0$. En enlevant cette possibilité, nous définissons les EDT0L-systèmes sans imbrication:

DÉFINITION. Un EDT0L-système $G = (N, T, R, \phi, \omega)$ est *sans imbrication* si $\forall B \in N$, $\forall d \in R^*$, $B\phi(d) = y_1 B y_2$ implique $y_1 y_2 \in T^*$.

Il est clair que, pour tout $B \in N$, il existe une borne $k(B)$ telle que si $y = B\phi(d)$ avec $d \in R^*$, $l_N(y) \leqslant k(B)$. Ceci implique que tout EDT0L-système sans imbrication est un EDT0L-système ultralinéaire.

DÉFINITION. Un EDT0L-système $G = (N, T, R, \phi, \omega)$ est *linéaire* si $\forall B \in N$, $\forall d \in R$, $l_N(y) \leqslant 1$ avec $y = B\phi(d)$. Si $\omega \in N^k$ on dira alors que G est un k-EDT0L-système linéaire.

Tout EDT0L-système linéaire est évidemment sans imbrication. En fait, les familles de langages engendrées par ces deux types de systèmes sont égales:

PROPOSITION VI.1. *Pour tout* EDT0L-*système sans imbrication $G = (N, T, R, \phi, \omega)$ il existe un* EDT0L-*système linéaire G' tel que $L(G') = L(G)$.*

Démonstration. Soit $G = (N, T, R, \phi, \omega)$ un EDT0L-système sans imbrication. Considérons la grammaire algébrique $H = (N \cup \{\sigma\}, T, P, \sigma)$ où σ est un nouveau symbole et où P est égal à $\{\sigma \rightarrow \omega\} \cup \{B \rightarrow B\phi(d) / B \in N, d \in R\}$.

Montrons en premier lieu, que H est aussi sans imbrication, c'est-à-dire que pour tout $B \in N$, $B \overset{*}{\Rightarrow}_H uBv$ implique $uv \in T^*$. En effet, dans le cas contraire, il existe, dans H, des dérivations $B \overset{*}{\Rightarrow}_H W_1CW_2$ avec $W_1W_2 \in T^*$ et $C \in N$, $D \overset{*}{\Rightarrow}_H x_2By_2$ et une production $C \to x_1\, Dy_1 \in P$ avec $D \in N$ et $l_N(x_1y_1) \geqslant 1$. On peut en déduire, par construction de H, qu'il existe α_1, $\alpha_2 \in R^*$, $d \in R$ tels que $D\phi(\alpha_1) = x_3By_3$, $D\phi(\alpha_1\alpha_2) = x_4W_1CW_2y_4$ et $D\phi(\alpha_1\alpha_2 d) = x_5W_1x_1\, Dy_1W_2y_5$. Comme $l_N(x_1y_1) \geqslant 1$, ceci contredit le fait que G est sans imbrication. Il existe donc un entier positif k vérifiant: $\forall B \in N$, $B \overset{*}{\Rightarrow}_H y$ implique $l_N(y) \leqslant k$. Donc, pour tout $B \in N$, $k'(B) = \sup\{l_N(y)/B \overset{*}{\Rightarrow}_H y\}$ est un entier positif. Posons $N' = \{(B, i)/B \in N,\ i \in \{1,..., k'(B)\}\}$ et $V' = N' \cup T$. L'homomorphisme h de $(N \cup T)^*$ dans V'^* est défini par $h(a) = a$, $\forall a \in T$ et $h(B) = (B, 1) \cdots (B, k'(B))$, $\forall B \in N$. Pour tout $y \in V'^*$ et tout entier positif i, $i(y)$ désignera le plus grand sous mot initial de y tel que $l_{N'}(y) \leqslant i$ et $\bar{\imath}(y)$ est le mot qui vérifie $i(y) = i'(y)\, \bar{\imath}(y)$ avec $i' = i - 1$ et $O(y) = 1$. Il est clair que $\forall y \in V'^*$ et pour tout entier i, $\bar{\imath}(y) \in \{1\} \cup N'T^*$.

Considérons le EDT0L-système $G' = (N', T, R, \phi', \omega')$ où $\omega' = h(\omega)$ et où ϕ' est défini de la manière suivante: $\forall d \in R$, $\forall (B, i) \in N'$, $(B, i)\, \phi'(d) = \bar{\imath}(h(B\phi(d)))$. Par construction, G' est un système linéaire et comme, par définition de $k'(B)$, $y = B\phi(d)$ implique $l_{N'}(h(y)) \leqslant k'(B)$, il est facile de vérifier que $L(G') = L(G)$. ∎

Un k-EDT0L-système est *linéaire sous forme normale* (l.s.f.n.) si c'est un k-EDT0L-systeme u.s.f.n. sans règle de transition. On peut, sans difficulté, obtenir, pour les EDT0L-systèmes linéaires, l'équivalent de la proposition I.1:

PROPOSITION VI.2. *Pour tout k-EDT0L-système linéaire, on peut construire un k-EDT0L-système l.s.f.n. équivalent.*

Pour tout entier positif k, LIL($2k$) (LIL($2k - 1$)) désignera la famille des langages engendrés par un k-EDT0L-système linéaire (libre) et LIL est égal à $\bigcup_{k\geqslant 1}$ LIL(k). Il est facile de vérifier que la plupart des résultats des sections I et II restent valables si on remplace ultralinéaire par linéaire et LULT par LIL. Les seules propriétés qui ne sont plus vérifiées sont les propositions I.2, I.4 et II.11. En effet, $\forall k > 1$, LIL(k) n'est pas clos par produit (cf. proposition VI.8) et LIL est clos par produit mais pas par étoile. De plus pour tout langage $L \in$ LIL, le langage $\{ww^R/w \in L\}$ appartient encore à LIL qui est donc clos par replication (cf. Greibach, 1972). Pour tout entier positif k, notons $L_{2k} = \{wd_1w^Rd_2 \cdots w^Rd_{2k}/w \in \{a, b\}^*\}$ et $L_{2k-1} = \{wd_1w^R \cdots w^Rd_{2k-2}wd_{2k-1}/w \in \{a, b\}^*\}$. La construction faite à la section III reste valable dans le cas des k-EDT0L-systèmes linéaires et il est clair que l'on obtient comme générateur un k-EDT0L-système ultralinéaire sans règle de transition. Considérons $\bar{G}_{k,2}$ (resp. $\bar{G}'_{k,2}$) obtenu à partir de $G_{k,2}$ (resp. $\bar{G}'_{k,2}$) en enlevant les règles de transition. $L(\bar{G}_{k,2})$ (resp. $L(\bar{G}'_{k,2})$) est rationnellement équivalent à L_{2k} (resp. L_{2k-1}), donc:

PROPOSITION VI.3. *Pour entier positif k,* LIL(k) *est égal à $\mathscr{C}(L_k)$, le plus petit cône rationnel contenant L_k.*

Soit un langage L, rep(L), la replication de L, est égal à $\{wcw^R/w \in L\}$. Comme pour tout k, L_k peut être obtenu par transduction rationnelle et replication à partir des langages rationnels, nous avons:

PROPOSITION VI.4. LIL *est le plus petit cône rationnel clos par replication. Donc* LIL *est clos par duplication et intercalation.*

Ce cône rationnel est noté $\bigcup_\rho \mathscr{R}_\rho$ dans Ginsburg et Spanier (1971). Pour tout entier k supérieur à 1, $E_k = \{a_1{}^n \cdots a_k{}^n/n \geqslant 0\}$ appartient à LIL(k)$\backslash$ $\mathscr{F}$(LULT($k-1$)). A fortiori, $E_k \in \mathscr{F}(\text{LIL}(k))\backslash\mathscr{F}(\text{LIL}(k-1))$. Nous retrouvons alors:

COROLLAIRE VI.5 (Ginsburg et Spanier, 1971, Greibach, 1972). $\mathscr{F}(\bigcup_\rho \mathscr{R}_\rho)$ *est une* FAL *non principale.*

DÉFINITION. Nous dirons qu'un langage L appartenant à LIL est de *degré k*, noté $d(L) = k$, si $L \in \text{LIL}(k)\backslash\text{LIL}(k-1)$ quand $k > 1$ ou si L est rationnel quand $k = 1$.

Par exemple, pour tout entier positif k, $d(E_k) = r(E_k) = k$. Par contre $L = \{a^{n_1}b^{n_1}a^{n_2}b^{n_2}a^{n_3}b^{n_3}/n_1, n_2, n_3 \geqslant 0\}$ est un LULT-langage de rang 3 et un LIL-langage de degré 4 (cf. proposition VI.8). Etudions, comme à la section IV, l'influence de certaines opérations sur le degré. En utilisant un raisonnement analogue à celui de la démonstration de la proposition IV.1, on obtient:

PROPOSITION VI.6. *Soient $L \subseteq T^*$ un* LIL*-langage infini et $c \notin T$. Le degré de $L[c] = \{wc^n/w \in L, n = l(w)\}$ est égal à $d(L) + 1$.*

Considérons maintenant $L_1 \subseteq T_1^*$, $L_2 \subseteq T_2^*$ des LIL-langages définis sur des alphabets disjoints. Montrons d'abord:

LEMME VI.7. *Le degré de L_1L_2 est inférieur à $d(L_1) + d(L_2)$.*

Démonstration. Distinguons plusieurs cas:

1) $d(L_1) = 2k_1$ et $d(L_2) = 2k_2$. Soients $G' = (N', T_1, R', \phi', \omega')$ un $k_1 + 1$-EDT0L-système l.s.f.n., libre à droite et à gauche qui engendre L_1 avec $N' = M' \times \{1,..., k_1 + 1\}$, $nt(\omega') = A'$ et $G'' = (N'', T_2, R'', \phi'', \omega'')$ un k_2-EDT0L-système l.s.f.n. qui engendre L_2 avec $N'' = M'' \times \{1,..., k_2\}$ et $nt(\omega'') = A''$. On supposera que $M' \cap M'' = \varnothing$ et $R' \cap R'' = \varnothing$. Considérons, alors, le système linéaire $G = (N, T, R, \phi, \omega)$ avec $N = (M' \cap M'') \times \{1,..., k_1 + k_2\}$, $T = T_1 \cup T_2$, $R = R' \cup R''$, $\omega = (A', 1) \cdots (A', k_1 + k_2)$ et où ϕ est défini de la manière suivante:

— $\forall B' \in M'$ et $\forall d'$ règle non terminale de G', on pose $(B',j)\,\phi(d') = (B',j)$ $\phi'(d')$ pour $1 \leqslant j \leqslant k_1 + 1$ et $(B',j)\,\phi(d') = (C',j)$ avec $C' = ntd(d')$ pour $k_1 + 2 \leqslant j \leqslant k_1 + k_2$.

— $\forall d'$ règle terminale de G' avec $ntg(d') = B'$, on pose $(B',j)\,\phi(d') = (A'', k_2 + j)$ pour $1 \leqslant j \leqslant k_1$ et $(B',j)\,\phi(d') = (A'', j - k_1)$ pour $k_1 + 1 \leqslant j \leqslant k_1 + k_2$.

— $\forall B'' \in M''$ et $\forall d''$ règle non terminale de G'' avec $C'' = ntd(d'')$, on pose $(B'',j)\;\phi(d'') = (B'',j)\,\phi''(d'')$ pour $1 \leqslant j \leqslant k_2$ et $(B'',j)\,\phi(d'') = (C'',j)$ pour $k_2 + 1 \leqslant j \leqslant k_1 + k_2$.

— $\forall d''$ règle terminale de G'' avec $B'' = ntg(d'')$, on pose $(B'',j)\,\phi(d'') = 1$ pour $1 \leqslant j \leqslant k_1 + k_2$.

Il est facile de voir que G est un $k_1 + k_2$-EDT0L-système linéaire libre à gauche qui simule d'abord avec ses $k_1 + 1$ premiers non-terminaux les dérivations de G' puis, avec ses k_2 derniers non-terminaux, les dérivations de G''. Donc $L_1L_2 = L(G)$ est de degré inférieur à $2k_1 + 2k_2 = d(L_1) + d(L_2)$.

2) L'un des deux langages est de dégré impair. On peut supposer que $d(L_1) = 2k_1 + 1$. On peut alors faire la même construction que dans le cas précédent, mais en prenant G' libre à droite et, si $d(L_2)$ est impair, G'' libre à droite, aussi. ▮

Montrons, maintenant que l'on ne peut pas "améliorer" ces constructions et que $d(L_1L_2) = d(L_1) + d(L_2) - 1$. Plaçons nous dans le cas où $d(L_1) = 2k_1$, $d(L_2) = 2k_2$ et supposons que $d(L_1L_2) < 2k_1 + 2k_2 - 1$. Il existe alors un $(k_1 + k_2 - 1)$-EDT0L-système l.s.f.n. $G = (N, T, R, \phi, \omega)$ qui engendre L_1L_2 avec $N = M \times \{1,..., k_1 + k_2 - 1\}$, $T = T_1 \cup T_2$ et $nt(\omega) = A$. Considérons $G' = (N', T_1, R, \phi', \omega')$ avec $N' = M \times \{1,..., k_1\}$, $\omega' = (A, 1) \cdots (A, k_1)$ et où ϕ' est défini par:

Pour toute règle $d \in R$ avec $ntg(d) = B$, vérifiant $\forall j \in \{k_1 + 1,..., k_1 + k_2 - 1\}$, $(B,j)\,\phi(d) \in (N \cup T_2)^*$, on posera $(B, i)\,\phi'(d) = h_1((B, i)\,\phi(d))$ $\forall i \in \{1,..., k_1\}$ où h_1 est l'homomorphisme défini sur $V = N \cup T$ par $h_1(a_2) = 1$, $\forall a_2 \in T_2$, $h_1(u) = u$ si $u \in V\backslash T_2$.

Considérons, aussi, $G'' = (N'', T_2, R, \phi'', \omega'')$ avec $N'' = M \times \{k_1,..., k_1 + k_2 - 1\}$, $\omega'' = (A, k_1) \cdots (A, k_1 + k_2 - 1)$ et où ϕ'' est défini par:

Pour toute règle $d \in R$ avec $ntg(d) = B$, vérifiant $\forall j \in \{1,..., k_1 - 1\}$, (B,j) $\phi(d) \in (N \cup T_1)^*$, on posera $(B, i)\,\phi''(d) = h_2((B, i)\,\phi(d))$, $\forall i \in \{k_1,..., k_1 + k_2 - 1\}$ où h_2 est l'homomorphisme défini sur V par $h_2(a_1) = 1$ $\forall a_1 \in T_1$ et $h_2(u) = u$ si $u \in V\backslash T_1$.

Il est clair que $L(G') \subseteq L_1$ et $L(G'') \subseteq L_2$. Pour tout mot x_1x_2 avec $x_1 \in L_1$ et $x_2 \in L_2$, il existe $\alpha \in R^*$ et une règle terminale d tels que $\omega\phi(\alpha) = y$ avec $nt(y) = B$ et $y\phi(d) = x_1x_2$. Le mot y peut se factoriser en $y_1(B, k_1)\,y_2$. Si $y_1\phi(d) = x_1' \in T_1^*$, $((B, k_1)\;y_2)\,\phi(d) = x_1''x_2$ avec $x_1'x_1'' = x_1$ et il est alors facile de vérifier que $x_2 \in L_g(G'')$. Si, par contre, $y_1\phi(d) \in T_1^*T_2{}^+$, $x_1 = \omega'\phi'(\alpha d) \in L_d(G')$. Donc $L_1L_2 = L_d(G')\,L_2 \cup L_1L_g(G'')$, ce qui implique soit $L_1 = L_d(G') \in \mathrm{LIL}(2k_1 - 1)$, soit $L_2 = L_g(G'') \in \text{LIL}(2k_2 - 1)$. Dans les deux cas, il y a contradiction avec l'hypothèse.

Si $d(L_1) = 2k_1 - 1$ et $d(L_2) = 2k_2$, ou fera le même raisonnement en prenant G libre à gauche.

Si $d(L_1) = 2k_1 - 1$ et $d(L_2) = 2k_2 - 1$, on prendra G libre à gauche et à droite.

Comme, pour tout k, LIL(k) est clos par miroir nous avons envisagé tous les cas possibles, donc:

PROPOSITION VI.8. *Soient L_1 et L_2 deux* LIL-*langages définis sur des alphabets disjoints. Alors le degré de L_1L_2 est égal à $d(L_1) + d(L_2) - 1$.*

Nous en déduisons que si $(Lc)^*$ appartient à LIL avec $L \subseteq T^*$ et $c \notin T$, alors L est rationnel. En effet si $(Lc)^* \in \text{LIL}(k)$, $(Lc)^k \in \text{LIL}(k)$ et d'après la proposition précédente $d(L) = 1$ et nous avons:

COROLLAIRE VI.9 (Greibach, 1972). *La famille* LIL *ne contient aucune* FAL *non rationnelle.*

COROLLAIRE VI.10. *Si L est un langage non rationnel appartenant à* LIL, *$\mathscr{C}(L)$ n'est pas clos par produit.*

Intéressons-nous, maintenant, à la fermeture par crochet et par chevron. Il est évident que pour tout langage $L \in \text{LIL}(2k)$, $\langle L \rangle$ et $(L)_2$ appartiennent à LIL$(2k)$. Par contre nous avons:

LEMME VI.11. *Soit L un langage inclus dans T^* avec $\bar{a}$, $\bar{b}$, a, $b \notin T$. Alors $\forall k \in \mathbb{N}_+$, $(L)_2$ appartient à* LIL$(2k+1)$ *si et seulement si L appartient à* LIL$(2k)$.

Démonstration. Si L appartient à LIL$(2k)$, $(L)_2 \in \text{LIL}(2k)$ donc à LIL$(2k+1)$. Réciproquement, si $L \in \text{LIL}(2k+1)$, il existe un $k+1$-EDT0L-système l.s.f.n. libre à droite $G = (N, T', R, \phi, \omega)$ qui engendre $(L)_2$ avec $N = M \times \{1,..., k+1\}$ $T' = T \cup \{a, b, \bar{a}, \bar{b}\}$ et $nt(\omega) = A$. Soit $G' = (N, T, R, \phi', \omega)$ où ϕ' est défini par: $\forall X \in N \cup T$, $\forall d \in R$, $X\phi'(d) = h(X\phi(d))$ où h est l'homomorphisme défini sur $V' = N \cup T'$ par $h(x) = x$ si $x \in V$ et $h(x) = 1$ si $x \in T' \backslash T$. Il est clair que G' est encore libre à droite et engendre L. Considérons $G'' = (N, T, R, \phi'', \omega'')$ avec $\omega'' = (A, 1) \cdots (A, k)$ et où ϕ'' est défini par: $\forall d \in R$ avec $B = ntg(d)$ et vérifiant $l_T((B, k+1)\, \phi(d)) = 0$, on pose $\forall j \in \{1,..., k\}$, $(B, j)\, \phi''(d) = h((B, j)\, \phi(d))$. G'' est un k-EDT0L-système linéaire tel que $L(G'') \subseteq L$. Prenons x appartenant à L. Comme $y = a^n b^p x \bar{b}^p \bar{a}^n$ appartient à $(L)_2$, il existe $\alpha \in R^*$ tel que $\omega\phi(\alpha) = y$. Si nous avons choisi n et p suffisamment grand, il existe une factorisation $\alpha = \alpha_1\alpha_2$ telle que $y_1 = \omega\phi(\alpha_1)$ vérifie $l_{\bar{a}}(y_1)$, $l_a(y_1) < n$, $l_b(y_1)$, $l_{\bar{b}}(y_1) < p$ et, soit $l_a(y_1)\, l_{\bar{a}}(y_1) \neq 0$, soit $l_b(y_1)\, l_{\bar{b}}(y_1) \neq 0$.

— Dans le premier cas, y_1 se factorise en $u_1 \bar{a} v_1$ avec $v_1 \in N^+$, et comme

$l_{\bar{b}}(y_1) < p$, $l_{\bar{b}}(u_1\phi(\alpha_2)) \neq 0$, ce qui implique $l_T((A, k+1)\,\phi(\alpha)) = 0$ et $x = \omega''\phi''(\alpha)$ appartient à $L(G'')$.

— Dans le second cas, y_1 se factorise en $u_1 b v_1$ avec $l_N(u_1) > 0$. Il est alors clair que x appartient à $L_g(G')$ qui est dans LIL($2k$) puisque G' était libre à droite.

Donc $L = L(G'') \cup L_g(G')$ appartient à LIL($2k$). ▌

Nous en déduisons immédiatement.

Proposition VI.12. *Soient L un* LIL-*langage inclus dans T^* avec a, $\bar{a}$, b, $\bar{b} \notin T$ et $L_1 = (L)_2$. Alors le degré de L_1 est égal à $2k+2$ si et seulement si $d(L) \in \{2k+1, 2k+2\}$.*

Remarquons que le lemme VI.11 et la proposition VI.12 ne sont plus valables si on remplace le crochet par un chevron. En effet, considérons le langage $C_1 = \{c^n d^n / n \geqslant 1\}$ qui est un langage linéaire non rationnel ($d(C_1) = 2$). D'après la proposition VI.8, pour tout $k \in \mathbb{N}_+$, le degré de C_1^{2k} est égal à $2k+1$. Il est facile de vérifier que $\langle C_1^{2k} \rangle$ appartient à LIL($2k+1$). Par contre si l'on considère $L = \{\bar{a}^n x \bar{b}^n / n \geqslant 0,\ x \in C_1^{2k}\}$, $d(L) = 2k+1$ et la démonstration du lemme VI.11 permet de montrer $d(\langle L \rangle) = 2k+2$. Nous pouvons, cependant, calculer le degré de $\langle L_1 L_2 \rangle$ si L_1 et L_2 sont des LIL-langages définis sur des alphabets disjoints ne contenant pas les lettres a, b, l'un des deux langages étant de degré pair. En effet:

Proposition VI.13. *Soient $L_1 \subseteq T_1^*$ et $L_2 \subseteq T_2^*$ des* LIL-*langages avec $T_1 \cap T_2 = \varnothing$, a, $b \notin T_1 \cup T_2$ et $L = \langle L_1 L_2 \rangle$. Si l'un des langages L_1, L_2 est de degré pair, alors le degré de L est égal à $d(L_1 L_2) = d(L_1) + d(L_2) - 1$.*

Démonstration. Si le degré du produit $L_1 L_2$ est égal à $2k$, $L_1 L_2$ et $L = \langle L_1 L_2 \rangle \in$ LIL($2k$), donc $2k = d(L_1 L_2) \leqslant d(L) \leqslant 2k$ ce qui entraîne bien $d(L) = d(L_1 L_2) = d(L_1) + d(L_2) - 1$.

Si le degré de $L_1 L_2$ est égal à $2k-1$, alors $d(L_1) + d(L_2) = 2k$ et les deux langages sont de degré pair. Posons $d(L_1) = 2k_1$ et $d(L_2) = 2k_2$ avec $k_1 + k_2 = k$. Soient $G' = (N', T_1, R', \phi', \omega')$ un $k_1 + 1$-EDT0L-système l.s.f.n. libre à droite et à gauche qui engendre L_1 et $G'' = (N'', T_2, R'', \phi'', \omega'')$ un k_2-EDT0L-système l.s.f.n. qui engendre L_2 avec $N' = M' \times \{1, \ldots, k_1 + 1\}$, $V' = N' \cup T_1$, $nt(\omega') = A'$, $N'' = M'' \times \{1, \ldots, k_2\}$, $V'' = N'' \cup T_2$, $nt(\omega'') = A''$, $V' \cap V'' = \varnothing$ et $R' \cap R'' = \varnothing$. Prenons Y, $Z \notin M' \cup M''$, r_1, $r_2 \notin R' \cup R''$ et posons $N = (M' \cup \{Z\}) \times \{1, \ldots, k_1 + k_2\} \cup \{(Y, 1)\} \cup N''$, $T = T_1 \cup T_2 \cup \{a, b\}$, $V = N \cup T$, $R = R' \cup R'' \cup \{r_1, r_2\}$, $\omega = (A', 1) \cdots (A', k_1 + k_2)$. Considérons $G = (N, T, R, \phi, \omega)$ où ϕ est défini de la manière suivante:

— Soit d' une règle non terminale de G' avec $ntg(d') = B'$, et $ntd(d') = C'$, alors $\forall j \in \{1, \ldots, k_1 + 1\}$, $(B', j)\,\phi(d') = (B', j)\,\phi'(d')$ et $\forall j \in \{k_1 + 2, \ldots, k_1 + k_2\}$, $(B', j)\,\phi(d') = (C', j)$.

— Soit d' une règle terminale de G' avec $ntg(d') = B'$, alors $\forall j \in \{1,..., k_1 + k_2\}$, $(B', j)\,\phi(d') = (Z, j)$.

— On pose $(Z, 1)\,\phi(r_1) = (Z, 1)a$, $(Z, k_1 + k_2)\,\phi(r_1) = (Z, k_1 + k_2)b$ et $\forall j \in \{2,..., k_1 + k_2 - 1\}$, $(Z, j)\,\phi(r_1) = (Z, j)$.

— Pour tout $j \in \{1,..., k_2\}$, on pose $(Z, k_1 + j)\,\phi(r_2) = (A'', j)$ et pour tout $j \in \{2,..., k_1\}$, $(Z, j)\,\phi(r_2) = 1$ et, enfin, $(Z, 1)\,\phi(r_2) = (Y, 1)$.

— Pour toute règle d'' de G'' avec $ntg(d'') = B''$, on pose $(B'', j)\,\phi(d'') = (B'', j)\,\phi''(d'')$, $\forall j \in \{1,..., k_2\}$. Et si d'' est une règle terminale, on ajoute $(Y, 1)$ $\phi(d'') = 1$.

Il est facile de vérifier que G est un $k_1 + k_2$-EDT0L-système linéaire libre à gauche qui engendre $L = \langle L_1L_2 \rangle$. Donc $d(L) \leqslant 2k_1 + 2k_2 - 1$ et comme $d(L) \geqslant d(L_1L_2) = 2k_1 + 2k_2 - 1$, nous obtenons $d(L) = d(L_1) + d(L_2) - 1$. ∎

En particulier:

Corollaire VI.14. *Soit $L \subseteq T^*$ un* LIL-*langage de degré pair avec a, b, $c \notin T$. Alors le degré de $\langle LcL \rangle$ est égal à $2d(L) - 1$.*

Par contre si L est de degré impair, on ne peut pas déterminer le degré de $\langle LcL \rangle$. Prenons, en effet, pour tout $k \in \mathbb{N}_+$, les langages E_2^{2k} et E_{2k+1}. D'après les propositions VI.6 et VI.8, $d(E_2^{2k}) = d(E_{2k+1}) = 2k + 1$. Comme $E_2^{2k}\,c\,E_2^{2k}$ est rationnellement équivalent à $E_2\,c\,E_2^{4k-1}$, et que le degré de E_2 est pair, nous déduisons de la proposition VI.13 que le degré de $\langle E_2^{2k}\,c\,E_2^{2k} \rangle$ est égal à $4k + 1$. Par contre, on peut montrer que le degré de $\langle E_{2k+1}\,c\,E_{2k+1} \rangle$ est égal à $4k + 2$.

Soient deux langages L_1 et L_2, *l'insertion de $\mathscr{L}_2$ dans $\mathscr{L}_1$*, notée $i(L_1, L_2)$ est égale à $\{x_1'x_2x_1'' / x_1'x_1'' \in L_1,\ x_2 \in L_2\}$. (cf. Greibach, 1972).

Montrons en premier lieu:

Lemme VI.15. *Si $L_1 \in$ LIL(k_1) et $L_2 \in$ LIL$(2k_2 - 1)$, alors $i(L_1, L_2)$ appartient à* LIL$(k_1 + 2k_2 - 2)$.

Démonstration. Soit un alphabet T tel que L_1, $L_2 \subseteq T^*$. Considérons $G = (N, T, R, \phi, \omega)$ un k-EDT0L-système l.s.f.n. avec $N = M \times \{1,..., k\}$, $V = N \cup T$ et $nt(\omega) = A$, qui engendre L_1. Il est évident que l'on peut supposer sans nuire à la généralité de la démonstration que pour tout règle linéaire d de G et tout $X \in N$, $X\phi(d) \in (T \cup \{1\})\,N(T \cup \{1\})$. Soit $G' = (N', T, R', \phi', \omega')$ un k_2-EDT0L-système l.s.f.n. libre à droite qui engendre L_2 avec $N' = M' \times \{1,..., k_2\}$, $V' = N' \cup T$, $nt(\omega') = A'$, $M \cap M' = \varnothing$ et $R \cap R' = \varnothing$. Pour tout $i \in \{1,..., k\}$, construisons le système linéaire $G_i = (N_i, T, R_i, \phi_i, \omega_i)$ de la manière suivante: Posons $R_i = R \cup R'' \cup \{r\}$, $N_i = \{i\} \times M \times \{1,..., k + k_2 - 1\} \cup N \cup M' \times N \cup M \times N'$ et $\omega_i = (i, A, 1) \cdots (i, A, k + k_2 - 1)$. La fonction ϕ_i sera définie par:

— Soit d une règle linéaire de G avec $ntg(d) = B$ et $\forall j \in \{1,..., k\}$, $(B, j)\,\phi(d) = u_j(C, j)\,v_j$. On pose, alors, pour tout $j \in \{1,..., k\}$, $(B, j)\,\phi_i(d) = u_j(C, j)\,v_j$ et

$(i, B, j)\,\phi_i(d) = u'_j(i, C, j)\,v'_j$ avec $u'_j = u_j$ si $1 \leqslant j \leqslant i$, 1 si $i < j \leqslant k_2 + i - 1$, u_{j+1-k_2} si $k_2 + i \leqslant j \leqslant k_2 + k - 1$ et $v'_j = v_j$ si $1 \leqslant j < i$, 1 si $i \leqslant j < k_2 + i - 1$, v_{j+1-k_2} si $k_2 + i - 1 \leqslant j \leqslant k_2 + k - 1$.

— La règle r est définie ainsi: $\forall B \in M$, $\forall j \in \{1,..., k + k_2 - 1\}$ on pose $(i, B, j)\,\phi_i(r) = (A', B, j)$ si $1 \leqslant j < i$, $(B, A', j + 1 - i)$ si $i \leqslant j < k_2 + i$, $(A', B, j + 1 - k_2)$ si $k_2 + i \leqslant j \leqslant k + k_2 - 1$.

— Soit d' une règle linéaire de G' avec $ntg(d') = B'$ et $\forall j \in \{1,..., k_2\}$, $(B', j)\,\phi'(d') = u_j(C', j)\,v_j$. On pose, alors, $\forall X \in N$, $(B', X)\,\phi_i(d') = (C', X)$ et $\forall B \in M$, $\forall j \in \{1,..., k_2\}(B, B', j)\,\phi_i(d') = u_j(B, C', j)\,v_j$.

— Soit d' une règle terminale de G' avec $ntg(d') = B'$. Pour tout $X \in N$, $(B', X)\,\phi_i(d') = X$ et $\forall B \in M$, $\forall j \in \{1,..., k_2\}$, $(B, B', j)\,\phi_i(d') = (B, i)$ si $j = k_2$, 1 sinon.

— Enfin, si d est une règle terminale de G, $\forall X \in N$, $X\phi_i(d) = X\phi(d)$.

Le système $G'_i = (N_i, T, R_i, \phi'_i, \omega_i)$ est défini de façon analogue, mais en prenant G' libre à gauche et en posant $\phi'_i(d) = \phi_i(d)$ pour toute règle non terminale de G'. Si d' est une règle terminale de G' avec $ntg(d') = B'$, alors, $\forall X \in N$, $(B', X)\,\phi'_i(d') = X$ et $\forall B \in M$, $\forall j \in \{1,..., k_2\}$, $(B, B', j)\,\phi'_i(d') = (B, i)$ si $j = 1$, 1 sinon.

Il est, alors, facile de vérifier que $i(L_1, L_2)$ est égal à $\bigcup_{i=1}^{k} (L(G_i) \cup L(G'_i))$, donc si $k_1 = 2k$, $i(L_1, L_2)$ appartient à $\mathrm{LIL}(k_1 + 2k_2 - 2)$. Si $k_1 = 2k - 1$, on peut supposer que G est libre à droite. Dans ce cas, pour tout $i \in \{1,..., k - 1\}$, G_i et G'_i sont libres à droite, G_k est libre à droite, $i(L_1, L_2)$ est égal à $(\bigcup_{i=1}^{k} L(G_i)) \cup (\bigcup_{i=1}^{k-1} L(G'_i))$ et appartient encore à $\mathrm{LIL}(k_1 + 2k_2 - 2)$. ∎

Soient $L_1 \subsetneq T_1^*$ et $L_2 \subsetneq T_2^*$, deux LIL-langages avec $d(L_1) = k_1$, $d(L_2) = 2k_2 + 1$, $T_1 \cap T_2 = \varnothing$ et $L = i(L_1, L_2)$. Comme $L_1L_2 = L \cap T_1^*T_2^*$, $d(L) \geqslant d(L_1L_2)$ qui est égal, d'après la proposition VI.8, à $k_1 + 2k_2$ et le lemme précédent implique, alors:

PROPOSITION VI.16. *Soient L_1 et L_2 deux* LIL-*langages définis sur des alphabets disjoints. Si le degré de L_2 est impair, alors le langage $i(L_1, L_2)$ est de degré $d(L_1) + d(L_2) - 1$.*

Intéressons-nous maintenant au cas où le langage L_2 que l'on insère dans L_1 est un LIL-langage de degré pair. Si L_1 est un langage régulier, défini sur un alphabet disjoint de celui de L_2, il est clair que $i(L_1, L_2)$ est de même degré que L_2. Par contre, si L_1 est un LIL-langage non régulier, on ne peut pas déterminer le degré de $i(L_1, L_2)$ en fonction uniquement de $d(L_1)$ et $d(L_2)$. Considérons en effet les langages $C_1 = \{c^n d^n / n \geqslant 0\}$ et $D_2 = \{wcw^R / w \in \{a, b\}^*\}$ qui sont deux LIL-langages de degré 2. Nous avons, alors:

LEMME VI.17. *Soit $L \subsetneq T^*$ un* LIL-*langage de degré pair avec $a, b, c, d \notin T$. Alors $L' = i(C_1, L)$ est de degré $d(L) + 1$ et $L'' = i(D_2, L)$ est de degré $d(L) + 2$.*

Démonstration. Posons $d(L) = 2k$. Il est facile de vérifier que $L_1' = \{c^n x c^p d^{n+p} / n, p \geqslant 0, x \in L\}$ peut être engendré par un $(k+1)$-EDT0L-système linéaire libre à gauche, ce qui implique $d(L_1') \leqslant 2k+1$. Par symétrie, $L_2' = \{c^{n+p} d^p x d^n / n, p \geqslant 0, x \in L\}$ est de degré $\leqslant 2k+1$, ainsi que $L' = L_1' \cup L_2'$. Et comme $LC_1 = L' \cap T^* \ \{c, d\}^*$, $d(L') \geqslant d(LC_1) = 2k+1$, donc $d(L') = 2k+1 = d(L)+1$.

Posons $L_1'' = L'' \cap \{a, b\}^* \ T^* ba^* c\{a, b\}^*$. Il est clair que L'' est rationnellement équivalent au langage $L_2'' = (L\{c^p d^p / p \geqslant 0\})_2$. En utilisant les propositions VI.8, VI.12 et le lemme VI.15, on obtient $d(L) + 2 = d(L_1'') = d(L_2'') \leqslant d(L'') \leqslant d(L) + 2$, donc $d(L'') = d(L) + 2$. ▮

On peut généraliser ce résultat en montrant:

PROPOSITION VI.18. *Soit $L \subseteq T^*$, un* LIL-*langage de degré pair avec a, b, c, $d \notin T$. Alors pour tout entier $k \geqslant 2$, il existe deux* LIL-*langages L_1' et L_1'' de degré k, définis sur des alphabets disjoints de T, tels que $i(L_1', L)$ et $i(L_1'', L)$ soient respectivement de degré $d(L) + k - 1$ et $d(L) + k$.*

Démonstration. Posons $L_1' = C_1^{k-1}$ où $C_1 = \{c^n d^n / n \geqslant 0\}$. Le langage $L_2' = i(L_1', L)$ est égal à $\bigcup_{j=0}^{k-2} C_1{}^j i(C_1, L)\, C_1^{k-2-j}$. D'après le lemme précédent $i(C_1, L)$ est de degré $d(L) + 1$, donc la proposition VI.8 implique que, pour tout $j \in \{0, \ldots, k-2\}$, le langage $C_1{}^j\, i(C_1, L)\, C_1^{k-2-j}$ est de degré $d(L) + k - 1$, donc $d(L_2') \leqslant d(L) + k - 1$ et comme $LC_1^{k-1} = L_2' \cap T^* c^* d^*$, on a $d(L_2') \geqslant d(LC_1^{k-1}) = d(L) + k - 1$ et $d(L_2') = d(L) + k - 1$.

Posons $L_1'' = D_2 L''$ où $D_2 = \{WcW^R / W \in \{a, b\}^*\}$ et où L'' est un LIL-langage de degré $k-1$ défini sur un alphabet T'' disjoint de $T \cup \{a, b, c\}$. Comme $L_2'' = i(L_1'', L) \cap \{a, b, c\}^* \ T^* \{a, b, c\}^* \ T''^*$ est égal à $i(D_2, L)\, L''$, on a, d'après le lemme précédent et la proposition VI.8, $d(L_2'') = d(L) + k$ et le lemme VI.15 implique que $i(L_1'', L)$ est de degré $d(L) + k$. ▮

Terminons cette section en montrant que la famille LIL ne peut pas être obtenue par insertion à partir d'un cône rationnel.

PROPOSITION VI.19. *Soit $\mathscr{L}$ un cône rationnel, clos par union, inclus dans* LIL. *Alors $\mathscr{C}_i(\mathscr{L})$, le plus petit cône rationnel contenant $\mathscr{L}$ et clos par insertion est égal à* LIL *si et seulement si $\mathscr{L} =$* LIL.

Démonstration. Si $\mathscr{L} =$ LIL qui est clos par insertion, nous avons bien $\mathscr{C}_i(\mathscr{L}) = \mathscr{C}_i(\mathrm{LIL}) = \mathrm{LIL}$.

Supposons $\mathscr{L} \subsetneq \mathrm{LIL}$. Il existe alors un langage $L_k \in \mathrm{LIL} \setminus \mathscr{L}$ avec $k \geqslant 3$ (cf. proposition VI.3). Comme L_k est sans insertion, $L_k \notin \mathscr{C}_i(\mathscr{L})$ qui est donc strictement inclus dans LIL. ▮

En particulier, comme LIL n'est pas un cône rationnel principal, nous obtenons.

COROLLAIRE VI.20. *Pour tout* LIL-*langage* L, $\mathscr{C}_i(L)$ *le plus petit cône contenant* L *et clos par insertion est strictement inclus dans* LIL.

VII. SUBSTITUTIONS DANS LES LULT-LANGAGES

Dans cette section, suivant l'idée et le formalisme de Nivat (1975), pour tout $k \in \mathbb{N}_+$, à la famille de langages $\mathrm{LULT}(k)$, nous allons faire correspondre l'opérateur de clôture par $\mathrm{LULT}(k)$, noté $\underline{\mathrm{LULT}(k)}$. Rappelons que pour toute famille de langages, l'opérateur $\underline{\mathscr{L}}$ est défini par: pour toute famille de langages $\mathscr{L}'$, $\mathscr{L}'\underline{\mathscr{L}} = \{\sigma(L)/L \in \mathscr{L}$ et σ est une $\mathscr{L}'$-substitution$\}$ (cf. Nivat, 1975). Ainsi pour toute famille de langage $\mathscr{L}'$, $\mathscr{L}'\underline{\mathrm{LULT}} = \bigcup_{k\geqslant 1} \mathscr{L}'\underline{\mathrm{LULT}(k)}$. Nous avons, en particulier, pour tout cône rationnel $\mathscr{L}$, $\mathscr{L}\underline{\mathrm{LULT}(1)} = \mathscr{L}\underline{\mathrm{Rat}} = \mathscr{F}(L)$, la plus petite FAL contenant $\mathscr{L}$. Nous poserons, par convention $\mathscr{L}\underline{\mathrm{LULT}(0)} = \mathscr{L}$. Nous allons étudier la hiérarchie d'opérateurs ainsi obtenue et montrer qu'elle est très fortement stricte, c'est-à-dire que pour tout cône rationnel clos par union, $\mathscr{L}$, soit $\mathscr{L} = \mathscr{L}\underline{\mathrm{LULT}}$, soit il existe un entier $k_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\mathscr{L} = \mathscr{L}\underline{\mathrm{LULT}(0)} = \cdots \mathscr{L}\underline{\mathrm{LULT}(k_0)} \subsetneq \mathscr{L}\underline{\mathrm{LULT}(k_0+1)} \subsetneq \cdots$. Montrons en premier lieu:

PROPOSITION VII.1. *Soient* L_1 *et* L_2, *deux langages définis sur des alphabets disjoints*, $k \in \mathbb{N}_+$ *et* $\mathscr{L}$ *un cône rationnel. Si* L_1L_2 *appartient à* $\mathscr{L}\underline{\mathrm{LULT}(2k)}$, *alors l'un des deux langages* L_1, L_2 *appartient à* $\mathscr{L}\underline{\mathrm{LULT}(2k-1)}$.

Démonstration. Soient T_1 et T_2 les deux alphabets disjoints tels que $L_1 \subseteq T_1^*$ et $L_2 \subseteq T_2^*$. Si L_1L_2 appartient à $\mathscr{L}\underline{\mathrm{LULT}(2k)}$, il existe un langage $L \subseteq T^*$ appartenant à $\mathrm{LULT}(2k)$ et une $\mathscr{L}$-substitution σ tels que $\sigma(L) = L_1L_2$. Pour $i = 1, 2$, posons $\Delta_i = \{a \in T/\sigma(a) \subseteq T_i^*\}$ et Δ désignera $\{a \in T/\sigma(a) \cap T_1^+T_2^+ \neq \varnothing\}$. Si tout $a \in T$ occurre dans un mot de L (ce que l'on peut toujours supposer), $T = \Delta \cup \Delta_1 \cup \Delta_2$. Montrons d'abord que l'on peut supposer, sans nuire à la généralité de la démonstration, que $\Delta = \varnothing$. En effet si Δ est non vide, posons $\Delta' = \{a'/a \in \Delta\}$ avec $\Delta' \cap T = \varnothing$ et considérons l'homomorphisme h défini sur T par $h(a) = a$ si $a \in \Delta_1 \cup \Delta_2$ et $h(a) = aa'$, si $a \in \Delta$. Comme $\mathrm{LULT}(2k)$ est un cône rationnel, le langage $L' = h(L)$ appartient encore à $\mathrm{LULT}(2k)$. Considérons, aussi, la substitution σ' définie sur $T \cup \Delta'$ par $\sigma'(a) = \sigma(a)$ si $a \in \Delta_1 \cup \Delta_2$, $\sigma'(a) = g_1(\sigma(a))$ si $a \in \Delta$ et $\sigma'(a') = g_2(\sigma(a))$ où pour $i = 1, 2$, g_i est l'homomorphisme défini sur $T_1 \cup T_2$ par $g_i(a) = a$ si $a \in T_i$, 1 sinon. La substitution σ' est une $\mathscr{L}$-substitution qui vérifie: $\sigma'(x) \subseteq T_1^*$ si $x \in \Delta_1 \cup \Delta$ et $\sigma'(x) \subseteq T_2^*$ si $x \in \Delta' \cup \Delta_2$. De plus $\sigma'(L')$ est égal à $\sigma(L)$. En effet, prenons $w \in L$. Si $w \in \Delta_1^*\Delta_2^*$, $\sigma'(w) = \sigma(w)$ par définition de σ'. Si $w \notin \Delta_1^*\Delta_2^*$, w se factorise en w_1aw_2 avec $w_1 \in \Delta_1^*$, $a \in \Delta$ et $w_2 \in \Delta_2^*$. Alors $w_1aa'w_2 \in L'$ et comme $\sigma(a) \subseteq \sigma'(a)\,\sigma'(a')$, nous obtenons $\sigma(w_1aw_2) \subseteq \sigma'(w_1aa'w_2) \subseteq \sigma'(L')$. Réciproquement, tout mot $z \in \sigma'(w_1aa'w_2)$ se factorise en $z_1z_1'z_2'z_2$ avec $z_1 \in \sigma'(w_1)$, $z_2 \in \sigma'(w_2) =$

$\sigma(w_2)$, $z'_1 \in \sigma'(a)$ et $z'_2 \in \sigma'(a')$. Comme $z'_1 \in \sigma'(a)$, il existe $t_2 \in T_2^*$ tel que $z'_1 t_2 \in \sigma(a)$, donc $z_1 z'_1 t_2 z_2 \in \sigma(w_1 a w_2) \subseteq L_1 L_2$ et comme $t_2 z_2 \in T_2^*$, $z_1 z'_1 \in T_1^*$, $z_1 z'_1 \in L_1$. De la même façon, on peut montrer que $z'_2 z_2 \in L_2$ ce qui implique que $z \in L_1 L_2$ et $\sigma'(L') = \sigma(L)$.

Nous pouvons donc supposer que $\Delta = \varnothing$, c'est-à-dire que $T = \Delta_1 \cup \Delta_2$. Soit $G = (N, T, R, \phi, \omega)$ un k-EDT0L-système ultralinéaire qui engendre L. Pour $i = 1, 2$, l'homomorphisme h_i est défini sur $V = N \cup T$, par $h_i(a) = a$ si $a \in \Delta_i$, 1 sinon et soit $G_i = (N, \Delta_i, R, \phi_i, \omega)$ où ϕ_i est défini par: $\forall d \in R$, $\forall u \in N \cup \Delta_i$, $u\phi_i(d) = h_i(u\phi(d))$. Posons $H_1 = L(G_1)$, $H'_1 = L_d(G_1)$, $H_2 = L(G_2)$ et $H'_2 = L_g(G_2)$. En reprenant le raisonnement fait lors de la démonstration de la proposition IV.9, on obtient $L = H'_1 H_2 \cup H_1 H'_2$. Donc $L_1 L_2 = \sigma(L) = \sigma(H'_1)\,\sigma(H_2) \cup \sigma(H_1)\,\sigma(H'_2)$. En outre, il est clair que $\sigma(H_1) = L_1$ et $\sigma(H_2) = L_2$, ce qui implique, soit $L_1 = \sigma(H'_1) \in \mathscr{L}\underline{\text{LULT}(2k-1)}$, soit $L_2 = \sigma(H'_2) \in \mathscr{L}\underline{\text{LULT}(2k-1)}$. ∎

Remarquons que la démonstration précédente reste valable tant que la famille $\mathscr{L}$ est close par homomorphisme alphabétique. D'autre part, cette proposition va nous permettre de retrouver immédiatement certaines propriétés. En posant $k = 2$, nous obtenons en particulier un résultat démontré par Jacob (1975) dans le cadre plus général des séries formelles.

COROLLAIRE VII.2 (Jacob, 1975). *Soient L_1 et L_2 deux langages définis sur des alphabets disjoints et $\mathscr{L}$ un cône rationnel. Si $L_1 L_2$ appartient à* $\mathscr{L}\underline{\text{Lin}}$, *alors l'un des deux langages L_1, L_2 appartient à* $\mathscr{L}\underline{\text{Rat}}$.

En particulier si $\mathscr{L}$ est inclus dans T^* et $c \notin T$, $(\mathscr{L}c)^* \in \mathscr{L}\underline{\text{Lin}}$ implique $(\mathscr{L}c)^* \in \mathscr{L}\underline{\text{Rat}}$.

En prenant $\mathscr{L} = \text{Rat}$, nous avons pour tout $k \in \mathbb{N}_+$, Rat $\underline{\text{LULT}(k)} = \text{LULT}(k)$ puisque LULT(k) est clos par substitution rationnelle. Nous retrouvons, alors, le corollaire IV.10. Enfin, si $\mathscr{L} = \text{Rat}$ et si $k = 2$, nous obtenons une propriété démontrée par Greibach (1966).

COROLLAIRE VII.3 (Greibach, 1966). *Soient L_1 et L_2 deux langages définis sur des alphabets disjoints. Si $L_1 L_2 \in$ Lin alors l'un des deux langages L_1, L_2 est rationnel.*

Une des propriétés intéressantes vérifiées par l'opérateur "chevron", démontrée par Boasson et Nivat (1973), a été énoncée dans Boasson, Crestin et Nivat (1973).

PROPOSITION VII.4. *Si $\mathscr{L}$ est un cône rationnel fermé par union et L est un langage défini sur un alphabet ne contenant ni a ni b, $\langle L \rangle \in$* $\mathscr{L}\underline{\text{Rat}}$ *implique $L \in \mathscr{L}$.*

Nous allons, maintenant, généraliser l'opération "chevron" et obtenir des propriétés analogues.

DÉFINITION. Pour tout $k \in \mathbb{N}_+$, et tout langage L, on pose $\langle L \rangle_k = \{a_1{}^n x a_2{}^n \cdots a_{k+1}^n / n \geqslant 0,\ x \in L\}$.

Δ désignera par la suite l'ensemble $\{a_1, \ldots, a_n, \ldots\}$

PROPOSITION VII.5. *Soient $\mathscr{L}$ un cône rationnel fermé par union et un langage $L \subseteq T^*$ tel que $\Delta \cap T = \varnothing$. Pour tout $k \in \mathbb{N}_+$, $\langle L \rangle_k \in \mathscr{L}\underline{\mathrm{LULT}(k)}$ si et seule ment si $\langle L \rangle_k \in \mathscr{L}$.*

La démonstration de cette proposition s'appuie sur les deux lemmes suivants:

LEMME VII.6. *Pour tout $k \in \mathbb{N}_+$, $\mathrm{LULT}(k)$ ne contient aucun sous-ensemble infini du langage $E_{k+1} = \{a_1{}^n \cdots a_{k+1}^n / n \geqslant 0\}$.*

Démonstration. Supposons que $\mathrm{LULT}(k)$ contienne un langage $L \subseteq E_{k+1}$. Comme $\mathrm{LULT}(k)$ ne contient que des PSL-langages, il existe un langage rationnel $R_1 \subseteq a_1^*$ tel que $L = \{a_1{}^n \cdots a_{k+1}^n / a_1{}^n \in R_1\}$. Si L est infini, R_1 est infini et il existe $s \in \mathbb{N}$, $t \in \mathbb{N}_+$ tels que $a_1{}^s(a_1{}^t)^* \subseteq R_1$. Considérons $L' = L \cap a_1{}^s(a_1{}^t)^*\, a_2^* \cdots a_{k+1}^*$. Il est, alors, facile de construire une transduction rationnelle τ telle que $E_{k+1} = \tau(L')$. Donc $d(L) \geqslant d(L') \geqslant d(E_{k+1}) = k + 1$ et $L \notin \mathrm{LULT}(k)$, d'où la contradiction. ∎

LEMME VII.7. *Soient $\mathscr{L}_1$ et $\mathscr{L}_2$ deux cônes rationnels et un langage $L \subseteq T^*$ avec $T \cap \Delta = \varnothing$ tels que $\langle L \rangle_k \in \mathscr{L}_1\mathscr{L}_2$. Alors, il existe un alphabet Y disjoint de Δ, un langage $L' \in \mathscr{L}_2$ avec $L' \subseteq \langle Y^* \rangle_k$ et une $\mathscr{L}_1$-substitution σ' telle que $\sigma'(L') = \langle L \rangle_k$, $\forall y \in Y$, soit $\sigma'(y) \subseteq T^*$, soit $\sigma'(y) \cap a_1{}^+ T^* a_2{}^+ \cdots a_{k+1}^+ \neq \varnothing$ et $\forall i \in \{1, \ldots, k+1\}$, $\sigma'(a_i) = \{a_i\}$.*

Démonstration. Comme $\langle L \rangle_k \in \mathscr{L}_1\underline{\mathscr{L}_2}$, il existe, dans $\mathscr{L}_2$, un langage $L_2 \subseteq Y^*$ (On peut supposer $Y \cap \Delta = \varnothing$) et une $\mathscr{L}_1$-substitution σ tels que $\sigma(L_2) = \langle L \rangle_k$. On peut supposer que tout $b \in Y$ occurre dans un mot de L_2, que $\sigma(b) \neq \varnothing$, $\forall b \in Y$.

Nous allons construire l'homomorphisme h de Y^* dans $(Y \cup \Delta)^*$ et la substitution σ' de la manière suivante. Prenons $b \in Y$ et distinguons plusieurs cas:

1) Si $\sigma(b) \subseteq a_1^*$ (resp. $\sigma(b) \subseteq a_2^* \cdots a_n^*$), $\sigma(b)$ ne contient qu'un élément et nous poserons $h(b) = \sigma(b)$.

2) Si $\sigma(b) \subseteq x_1 T^* x_2$ avec $x_1 \in a_1^*$, $x_2 \in a_2^* \cdots a_{k+1}^*$ et soit x_1 et $x_2 \neq 1$, soit $\sigma(b) \cap x_1 T^+ x_2 \neq \varnothing$, nous poserons $h(b) = x_1 b x_2$ et $\sigma'(b) = \{w \in T^* / x_1 w x_2 \in \sigma(b)\}$. Nous sommes dans ce cas, en particulier, quand $\sigma(b)$ est inclus dans $a_1^* T^* \backslash a_1^*$ ou dans $T^* a_2^* \cdots a_{k+1}^* \backslash a_2^* \cdots a_{k+1}^*$.

3) Si nous ne somme pas dans l'un des deux premiers cas, il est facile de vérifier que $b \in \{a \in Y / \sigma(a) \cap a_1{}^+ T^* a_2{}^+ \cdots a_{k+1}^+ \neq \varnothing\}$ ensemble que nous noterons E. Alors, si $k > 1$, il existe $i, j \in \mathbb{N}$ tels que $x_1 b x_2 \in L_2$ implique $\sigma(x_1) =$

$a_1{}^i$ et $\sigma(x_2) = a_{k+1}^j$. Nous poserons $\sigma'(b) = a_1{}^i\sigma(b)\, a_{k+1}^j$. Si, par contre, $k = 1$, il existe un entier i tel que pour tout $w \in \sigma(b)$, $l_{a_1}(w) - l_{a_2}(w) = i$. Si $i \in \mathbb{N}$, nous poserons $h(b) = a_1{}^i b$ et $\sigma'(b) = \{w/a_1{}^i w \in \sigma(b)\}$. Si i est négatif nous poserons $h(b) = ba_2^{i'}$ et $\sigma'(b) = \{w/wa_2^{i'} \in \sigma(b)\}$ avec $i' = -i$.

Achevons de définir σ' sur $Y \cup \Delta$ en posant $\sigma'(b) = \{b\}$ partout où σ' n'a pas encore été défini. Comme $\mathscr{L}_1$ est un cône rationnel, il est clair que pour tout $b \in Y \cup \Delta$, $\sigma'(b) \in \mathscr{L}_1$. Donc σ' est une $\mathscr{L}_1$-substitution qui vérifie bien, par construction: $\forall y \in Y$, soit $\sigma'(y) \subseteq T^*$, soit $\sigma'(y) \cap a_1{}^+T^*a_2{}^+ \cdots a_{k+1}^+ \neq \varnothing$ et $\forall i \in \{1,\ldots, k+1\}$, $\sigma'(a_i) = \{a_i\}$. Si $k = 1, L' = h(L_2) \in \mathscr{L}_2$, $L' \subseteq \langle Y^*\rangle_k$ et il est facile de vérifier que $\sigma'(L') = \sigma'(h(L_2)) = \sigma(L_2) = \langle L\rangle_k$. Si k est supérieur à 1, nous prendrons $L' = h(L_2 \backslash Y^*EY^*) \cup E$. Le langage L' est encore inclus dans $\langle Y^*\rangle_k$ et comme $\mathscr{L}_2$ est un cône rationnel, $L' \in \mathscr{L}_2$. De plus, il est clair que $\sigma'(L') = \sigma(L_2) = \langle L\rangle_k$. ∎

Démonstration de la proposition VII.5.

Comme LULT(k) est un cône rationnel, on peut appliquer le lemme précédent avec $\mathscr{L}_1 = \mathscr{L}$ et $\mathscr{L}_2 = \mathrm{LULT}(k)$. Posons $Y_1 = \{y \in Y/\sigma'(y) \cap a_1{}^+T^*a_2{}^+ \cdots a_{k+1}^+ \neq \varnothing\}$. D'après le lemme VII.6, il existe $n_0 \in \mathbb{N}_+$ tel que $a_1{}^n z a_2{}^n \cdots a_{k+1}^n \in L'$ avec $z \in Y^*$ implique $n < n_0$. Prenons $s = n_0 + p$ avec $p \in \mathbb{N}$ et $w \in L$. Le mot $a_1{}^s w a_2{}^s \cdots a_{k+1}^s \in \langle L\rangle_k = \sigma'(L')$, donc il existe $y_1 \in Y_1$ et un entier $i \leqslant n_0$ tels que $a_1{}^i y_1 a_2{}^i \cdots a_{k+1}^i \in L'$ ($i = 0$ si $k > 1$) et $a_1^{s-i} w a_2^{s-i} \cdots a_{k+1}^{s-i} \in \sigma'(y_1)$. Donc pour tout $p \in \mathbb{N}$ et tout $w \in L$, il existe $j \in \{0,\ldots, n_0\}$ tel que $a_1^{p+j} w a_2^{p+j} \cdots a_{k+1}^{p+j} \in \sigma'(Y_1)$. D'après ce que nous venons de voir, il est facile de montrer que $\langle L\rangle_k = \bigcup_{j=0}^{n_0} (h(g^{-1}(L'') \cap a_1'^j a_1^* T^* a_2'^j a_2^* \cdots a_{k+1}'^j a_{k+1}^*)$ où h et g sont des homomorphismes définis par $h(a) = g(a) = a$, $\forall a \in T$ et $\forall i \in \{1,\ldots, k+1\}$, $g(a_i') = g(a_i) = a_i$, $h(a_i') = 1$, $h(a_i) = a_i$ et où $L'' = \sigma'(Y_1)$. Comme $\mathscr{L}$ est un cône rationnel clos par union L'' et $\langle L\rangle_k \in \mathscr{L}$. ∎

En faisant $k = 1$, dans la proposition VII.5 nous retrouvons la proposition VII.4 légèrement précisée:

Corollaire VII.8. *Soient $\mathscr{L}$ un cône rationnel clos par union et L langage défini sur un alphabet ne contenant ni a, ni b. Alors $\langle L\rangle \in \mathscr{L}\underline{\mathrm{Rat}}$ implique $\langle L\rangle \in \mathscr{L}$.*

Remarquons que l'hypothèse de fermeture par union du cône $\mathscr{L}$ est nécessaire. En effet Ginsburg et Spanier (1974) ont montré qu'il existait un cône rationnel $\mathscr{L}$ tel que $\{a^n b^n/n \geqslant 0\} \in \mathscr{L}\underline{\mathrm{Rat}}\backslash\mathscr{L}$. Donc, si on prend $L = \{1\}$, on obtient $\langle L\rangle \in \mathscr{L}\underline{\mathrm{Rat}}\backslash\mathscr{L}$ où $\mathscr{L}$ est un cône rationnel.

La proposition suivante est analogue à la proposition VII.5 mais nous fait descendre "moins brutalement" dans la hiérarchie:

Proposition VII.9. *Soient $\mathscr{L}$ un cône rationnel et L un langage inclus dans T^* avec $\Delta \cap T = \varnothing$. Pour tout $k \in \mathbb{N}_+$, $\langle L\rangle_{2k} \in \mathscr{L}\underline{\mathrm{LULT}(2k+1)}$ si et seulement si $L \in \mathscr{L}\underline{\mathrm{LULT}(2k)}$.*

Pour démontrer cette proposition nous utiliserons le lemme suivant:

LEMME VII.10. *Soit L' un langage inclus dans $\langle Y^*\rangle_{2k}$ avec $Y \cap \Delta = \varnothing$. Si L' appartient à* LULT$(2k+1)$, *il existe $n_0 \in \mathbb{N}_+$ et $L'' \in$* LULT$(2k)$ *tels que $\{x \in Y^*/\exists n \geqslant n_0,\, a_1{}^n x a_2{}^n \cdots a_{2k+1}^n \in L'\} \subseteq L'' \subseteq h(L')$ où h est l'homomorphisme défini sur $Y \cup \Delta$ par $h(b) = b$ si $b \in Y$, 1 sinon.*

Démonstration. Soit $G = (N, T, R, \phi, \omega)$ un $k+1$-EDT0L-système u.s.f.n. libre à gauche qui engendre L' avec $T = Y \cup \Delta$, $V = N \cup T$ et $N = M \times \{1, \ldots, k+1\}$. Etendons l'homomorphisme h à V en posant $h(X) = X$, $\forall X \in N$. Considérons $G' = (N, Y, R, \phi', \omega)$, le système obtenu à partir de G en posant $\forall X \in N$ et $\forall d \in R$, $X\phi'(d) = h(X\phi(d))$. Montrons que $L'' = L_d(G')$ vérifie les propriétés du lemme.

Comme G' est libre à gauche, $L'' = L_d(G') = L_{dg}(G')$ appartient à LULT$(2k)$. De plus $L'' = L_d(G') \subseteq L(G') = h(L')$. Enfin il existe $n_0 \in \mathbb{N}_+$ tel que si $w = a_1{}^n x a_2{}^n \cdots a_{2k+1}^n \in L'$ avec $n \geqslant n_0$ et $x \in Y^*$, tout $\alpha \in R^*$ vérifiant $\omega\phi(\alpha) = w$, se factorise en $\alpha_1\alpha_2$ de telle façon que $y_1 = \omega\phi(\alpha_1)$ vérifie: $\forall i \in \{1, \ldots, 2k+1\}$, $1 \leqslant l_{a_i}(y_1) < n$. Comme G est libre à gauche et que $y_1\phi(\alpha_2) = w$, il est facile de vérifier que $y_1 = (B, 1)\, a_1^{i_1} x a_2^{i_2} (B, 2)\, a_3^{i_3} \cdots a_{2k}^{i_{2k}} (B, k+1)\, a_{2k+1}^{i_{2k+1}}$. Donc $\omega\phi'(\alpha_1) = (B, 1)\, x (B, 2) \cdots (B, k+1)$ et $x \in L_{dg}(G')$. ▌

Démonstration de la proposition VII.9.

Prenons $\langle L\rangle_{2k}$ appartenant à $\mathscr{L}\underline{\mathrm{LULT}(2k+1)}$. D'après le lemme VII.7, il existe un alphabet Y disjoint de Δ, un langage $L' \in$ LULT$(2k+1)$ avec $L' \subseteq \langle Y^*\rangle_{2k}$ et une $\mathscr{L}$-substitution σ' telle que $\sigma'(L') = \langle L\rangle_{2k}$, $\forall i \in \{1, \ldots, 2k+1\}$, $\sigma'(a_i) = \{a_i\}$ et $\forall y \in Y$, soit $\sigma'(y) \subseteq T^*$, soit $\sigma'(y) \cap a_1{}^+ T^* a_2{}^+ \cdots a_{2k+1}^+ \neq \varnothing$. Posons $Y_1 = \{y \in Y/\sigma'(y) \subseteq T^*\}$ et $Y_2 = Y \backslash Y_1$. Il est clair que $L' \subseteq \langle Y_1^*\rangle_{2k} \cup \langle Y_2\rangle_{2k}$. Soient $n_0 \in \mathbb{N}_+$ et $L'' \in$ LULT$(2k)$ vérifiant le lemme précédent. Montrons que L est égal à $g(\sigma'(L'' \cup Y_2))$ où g est défini $\Delta \cup T$ par $g(b) = 1$ si $b \in \Delta$, b sinon. Prenons, en effet, $x \in L'' \cup Y_2$. Il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $w = a_1{}^n x a_2{}^n \cdots a_{2k+1}^n \in L'$, donc $\sigma'(w)$ est inclus dans $\sigma'(L') = \langle L\rangle_{2k}$ et $g(\sigma'(w)) \subseteq g(\langle L\rangle_{2k}) = L$. Prenons, maintenant, $x \in L$. Le mot $w = a_1^{n_0} x a_2^{n_0} \cdots a_{2k+1}^{n_0} \in \langle L\rangle_{2k} = \sigma'(L')$. Distinguons deux cas:

1) $w \in \sigma'(L' \cap \langle Y_1^*\rangle_{2k})$. Alors il existe $y \in Y_1^*$ tel que $a_1^{n_0} y a_2^{n_0} \cdots a_{2k+1}^{n_0} \in L'$ ce qui implique $y \in L''$ et $x = \sigma'(y) \subseteq T^*$, donc $x = g(\sigma'(y))$ appartient à $g(\sigma'(L''))$.

2) $w \in \sigma'(L' \cap \langle Y_2\rangle_{2k})$. Alors il existe $y_2 \in Y_2$ tel que $x = g(\sigma'(y_2)) \in g(\sigma'(Y_2))$.

Comme $L'' \in$ LULT$(2k)$, $L'' \cup Y_2$ appartient à LULT$(2k)$ et comme σ'est une $\mathscr{L}$-substitution $\sigma'(L'' \cup Y_2) \in \mathscr{L}\underline{\mathrm{LULT}(2k)}$ qui est un cône rationnel, donc clos par homomorphisme et $L = g(\sigma'(L'' \cup Y_2))$ appartient à $\mathscr{L}\underline{\mathrm{LULT}(2k)}$.

Réciproquement si L appartient à $\mathscr{L}\underline{\mathrm{LULT}(2k)}$, il existe une $\mathscr{L}$-substitution

σ et un langage $L' \subseteq Y^*$ appartenant à LULT($2k$) avec $Y \cap \Delta = \varnothing$ et $\sigma(L') = L$. Comme $L' \in$ LULT($2k$), il est facile de vérifier que $\langle L'\rangle_{2k} \in$ LULT($2k+1$). Etendons σ à $Y \cup \Delta$ en posant $\forall i \in \{1,\ldots, 2k+1\}$, $\sigma(a_i) = \{a_i\}$. Nous obtenons $\langle L\rangle_{2k} = \sigma(\langle L'\rangle_{2k}) \in \mathscr{L}$LULT($2k+1$). ∎

Il est facile de vérifier que si $L \in$ LULT($2k+1$), $\langle L\rangle_{2k} \in$ LULT($2k+2$) et d'après la proposition précédente avec $\mathscr{L}$ = Rat, $\langle L\rangle_{2k} \in$ LULT($2k+1$) implique $L \in$ LULT($2k$), donc:

Corollaire VII.11. *Soit L un* LULT-*langage de rang* $2k+1$ *défini sur un alphabet disjoint de* Δ. *Alors* $L' = \langle L\rangle_{2k}$ *est un* LULT-*langage de rang* $2k+2$.

Nous pouvons en déduire un résultat qui peut aussi se montrer à partir de la proposition IV.13.

Corollaire VII.12. *Pour tout entier* $k > 1$, LULT(k) *n'est pas clos par insertion.*

Démonstration. Si k est pair, LULT(k) n'est pas clos par produit, donc à fortiori, n'est pas clos par insertion. Si k est impair, posons $k = 2k'+1$ et considérons un LULT-langage de rang $2k'+1$ défini sur un alphabet T disjoint de Δ. Il est alors clair que $L' = i(E_k, L)$ est de rang au moins égal à $\langle L\rangle_{2k'} = i(E_k, L) \cap a_1^* T^* a_2^* \cdots a_{2k'+1}^*$. Donc $r(L') \geqslant 2k'+2$ et $L' \notin$ LULT($2k'+1$). ∎

Pour $k \geqslant 3$, au lieu de faire une insertion dans E_k entre les "a_1" et les "a_2", on peut faire cette insertion entre les "a_2" et les "a_3":

Définition. Pour tout entier $k \geqslant 2$, et tout langage L nous poserons $\langle\langle L\rangle_k = \{a_1{}^n a_2{}^n x a_3{}^n \cdots a_{k+1}^n / n \geqslant 0,\ x \in L\}$.

En utilisant le même raisonnement que pour la proposition VII.5, nous obtenons:

Proposition VII.13. *Soient* $\mathscr{L}$ *un cône rationnel fermé par union et L un langage inclus dans* T^* *avec* $T \cap \Delta = \varnothing$. *Pour tout entier* $k \geqslant 2$, $\langle\langle L\rangle_k \in \mathscr{L}$LULT($k$) *si et seulement si* $\langle\langle L\rangle_k \in \mathscr{L}$.

Nous allons aussi obtenir un résultat analogue à la proposition VII.9, mais cette fois, nous descendons de deux "crans" dans la hiérarchie en passant de $\mathscr{L}$LULT($2k$) à $\mathscr{L}$LULT($2k-2$).

Proposition VII.14. *Soient* $\mathscr{L}$ *un cône rationnel et L un langage inclus dans* T^* *avec* $T \cap \Delta = \varnothing$. *Pour tout entier* $k \geqslant 2$, $\langle\langle L\rangle_{2k-1} \in \mathscr{L}$LULT($2k$) *si et seulement si* $L \in \mathscr{L}$LULT($2k-2$).

La démonstration de cette proposition repose sur les deux lemmes suivants.

Le premier lemme se démontre de la même façon que le lemme VII.7. La modification de l'énoncé provient du fait qu'ici on fait une insertion dans E_k avec $k \geqslant 3$.

LEMME VII.15. *Soient $\mathscr{L}_1$ et $\mathscr{L}_2$ deux cônes rationnels et un langage $L \subseteq T^*$ avec $T \cap \Delta = \varnothing$, tels que $\langle\langle L\rangle_k \in \mathscr{L}_1\mathscr{L}_2$ avec $k \geqslant 2$. Alors il existe un alphabet Y disjoint de Δ, un langage $L' \in \mathscr{L}_2$ avec $L' \subseteq \langle\langle Y^*\rangle_k$, des langages $L_1, \ldots, L_n \in \mathscr{L}_1$ et une $\mathscr{L}_1$-substitution σ tels que $\forall y \in Y$, $\sigma(y) \subseteq T^*$, $\forall i \in \{1,\ldots, k+1\}$, $\sigma(a_i) = \{a_i\}$ et $\langle\langle L\rangle_k = \sigma(L') \cup (\bigcup_{i=1}^n L_i)$.*

LEMME VII.16. *Soient L' un langage inclus dans $\langle\langle Y^*\rangle_{2k-1}$ avec $Y \cap \Delta = \varnothing$, un entier $k \geqslant 2$ et h l'homomorphisme défini sur $Y \cup \Delta$ par $h(b) = b$ si $b \in Y$, 1 sinon. Si L' appartient à* LULT$(2k)$, *il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ et $L'' \in$* LULT$(2k-2)$ *tels que $\{x \in Y^*/\exists n \geqslant n_0,\ a_1{}^n a_2{}^n x a_3{}^n \cdots a_{2k}^n \in L'\} \subseteq L'' \subseteq h(L')$.*

Démonstration. Soit $G = (N, T, R, \phi, \omega)$ un k-EDT0L-système u.s.f.n. qui engendre L' avec $T = Y \cup \Delta$, $V = N \cup T$ et $N = M \times \{1,\ldots, k\}$. Etendons l'homomorphisme h à V en posant $h(X) = X$, $\forall X \in N$. Considérons $G' = (N, Y, R, \phi', \omega)$ obtenu à partir de G en "effaçant les lettres de Δ" (on pose $\forall X \in N$ et $\forall d \in R$, $X\phi'(d) = h(X\phi(d))$). Il existe, pour le système G, un entier n_0 tel que si $w = a_1{}^n a_2{}^n x a_3{}^n \cdots a_{2k}^n \in L'$ avec $n \geqslant n_0$ et $x \in Y^*$, tout $\alpha \in R^*$ vérifiant $\omega\phi(\alpha) = w$ se factorise en $\alpha_1\alpha_2$ de telle façon que $y_1 = \omega\phi(\alpha_1)$ vérifie: $\forall i \in \{1,\ldots, 2k\}$, $1 \leqslant l_{a_i}(y_1) < n$. On en déduit, comme au lemme VII.10 que $x \in L'' = L_{dg}(G')$ qui appartient à LULT$(2k-2)$ et qui est inclus dans $L(G') = h(L')$. ∎

*Démonstration de la proposition VII.*14.

Prenons $\langle\langle L\rangle_{2k-1}$ appartenant à $\mathscr{L}$LULT$(2k)$. Appliquons le lemme VII.15 avec $\mathscr{L}_1 = \mathscr{L}$ et $\mathscr{L}_2 =$ LULT$(2k)$. Soit g l'homomorphisme défini sur $T \cup \Delta$ par $g(b) = 1$ si $b \in \Delta$, b sinon. Le langage L est égal à $g(\langle\langle L\rangle_k)$, donc $L = g(\sigma(L')) \cup (\bigcup_{i=1}^n g(L_i))$. Comme les langages L_i, pour $i = 1,\ldots, n$ appartiennent à $\mathscr{L}$, et comme $k \geqslant 2$, LULT$(2k-2)$ est clos par union ainsi que le cône $\mathscr{L}$LULT$(2k-2)$, donc $L_0 = \bigcup_{i=1}^n g(L_i)$ appartient à $\mathscr{L}$LULT$(2k-2)$.

Soit L'' le langage construit au lemme VII.16. Alors $\sigma(L'')$ appartient à $\mathscr{L}$LULT$(2k-2)$. Il nous reste à montrer que $\sigma(L'') \cup L_0 = g(\sigma(L')) \cup L_0 = L$.

Comme pour tout $y \in Y$, $\sigma(y) \subseteq T^*$, on a $\sigma(L'') \subseteq \sigma(h(L')) \subseteq g(\sigma(L'))$. Prenons, maintenant, $x \in L \backslash L_0$. Alors $a_1^{n_0} a_2^{n_0} x a_3^{n_0} \cdots a_{2k}^{n_0} \in \sigma(L')$ et il existe $z \in Y^*$ tel que $a_1^{n_0} a_2^{n_0} z a_3^{n_0} \cdots a_{2k}^{n_0} \in L'$ avec $x \in \sigma(z)$. D'après le lemme VII.16, z appartient à L'' et $x \in \sigma(L'')$. Donc $L = \sigma(L'') \cup L_0$ appartient à $\mathscr{L}$LULT$(2k-2)$.

Réciproquement, si $L \in \mathscr{L}$LULT$(2k-2)$, il existe dans LULT$(2k-2)$ un langage $L' \subseteq Y^*$ avec $Y \cap \Delta = \varnothing$ et une $\mathscr{L}$-substitution σ telle que $L = \sigma(L')$. Il est facile de vérifier que $\langle\langle L'\rangle_{2k-1} \in$ LULT$(2k)$ (on prend un k-EDT0L-système ultralinéaire libre à droite et à gauche qui engendre L', puis on construit ce qui entoure L'). Etendons σ à $Y \cup \Delta$ en posant $\sigma(b) = \{b\}$, $\forall b \in \Delta$. Alors $\langle\langle L\rangle_{2k-1} = \sigma(\langle\langle L'\rangle_{2k-1}) \in \mathscr{L}\underline{\mathrm{LULT}(2k)}$. ▮

Prenons un LULT-langage de rang p, L inclus dans Y^* avec $Y \cap \Delta = \varnothing$ et un entier $k \geqslant 2$. Posons $L' = \langle\langle L\rangle_{2k-1}$. Si $p \leqslant 2k-2$, il est facile de construire un k-EDT0L-système ultralinéaire qui engendre L', donc $r(L') \leqslant 2k$ et comme $r(L') \geqslant r(E_{2k}) = 2k$, on obtient $r(L') = 2k$. Si $L \in \mathrm{LULT}(2k)$, on peut construire un $(k+1)$-EDT0L-système ultralinéaire libre qui engendre L', donc $r(L') \leqslant 2k+1$. Or, la proposition précédente implique, en prenant $\mathscr{L} = \mathrm{Rat}$, que $r(L') = 2k$ entraîne $r(L) \leqslant 2k-2$. Nous en déduisons:

Corollaire VII.17. *Soient k un entier $\geqslant 2$, L un* LULT*-langage de rang p inclus dans Y^* avec $\Delta \cap Y = \varnothing$ et $L' = \langle\langle L\rangle_{2k-1}$. Alors L' est de rang $2k$ si $p \leqslant 2k-2$ et L' est de rang $2k+1$ si $2k+1 \leqslant p \leqslant 2k$.*

Remarquons, aussi, que la proposition VII.9 reste valable si on remplace $\langle L\rangle_{2k}$ par $\langle\langle L\rangle_{2k}$. La démonstration est tout à fait semblable.

Proposition VII.18. *Soient $\mathscr{L}$ un cône rationnel et L un langage inclus dans T^* avec $T \cap \Delta = \varnothing$. Pour tout $k \in \mathbb{N}_+$, $\langle\langle L\rangle_{2k} \in \mathscr{L}\underline{\mathrm{LULT}(2k+1)}$ si et seulement si $L \in \mathscr{L}\underline{\mathrm{LULT}(2k)}$.*

Pour toute famille de langage $\mathscr{L}$ et tout $t \in \mathbb{N}_+$, l'opérateur $\underline{\mathscr{L}}_t$ est défini par induction au moyen des relations $\underline{\mathscr{L}}_1 = \underline{\mathscr{L}}$ et $\underline{\mathscr{L}}_{t+1} = \underline{\mathscr{L}}_t\underline{\mathscr{L}}$. Rappelons un résultat très important dû à S. Greibach (1970) (cf. à ce sujet Beauquier, 1978a, b et Latteux, 1978).

Proposition VII.19 (Greibach, 1970). *Soient $\mathscr{L}_1$ et $\mathscr{L}_2$ deux cônes rationnels clos par union et L_1, L_2 deux langages ne contenant pas le mot vide et définis sur des alphabets disjoints. Si $s(L_2, L_1) \in \mathscr{L}_1\underline{\mathscr{L}}_2$ alors, soit $L_1 \in \mathscr{L}_1$, soit $L_2 \in \mathscr{L}_2$.*

Nous pouvons en déduire deux résultats:

Corollaire VII.20. *Soient $\mathscr{L}$, $\mathscr{L}'$ deux cônes rationnels clos par union mais pas par étoile. Alors, $\forall t \in \mathbb{N}_+$, $\mathscr{L}\underline{\mathscr{L}}'_t \subsetneq \mathscr{L}\underline{\mathscr{L}}'_t\underline{\mathrm{Rat}}$.*

Démonstration. Soient L et L' deux langages ne contenant pas le mot vide et définis sur des alphabets disjoints tels que $L \in \mathscr{L}\underline{\mathrm{Rat}}\backslash\mathscr{L}$ et $L' \in \mathscr{L}'\underline{\mathrm{Rat}}\backslash\mathscr{L}'$. Le langage $s(L', L)$ appartient à $\mathscr{L}\underline{\mathrm{Rat}}\underline{\mathscr{L}'}\underline{\mathrm{Rat}}$ qui est égal à $\mathscr{L}\underline{\mathscr{L}}'\underline{\mathrm{Rat}}$ puisque $\mathrm{Rat}\,\underline{\mathscr{L}}' = \mathscr{L}'$. Si $\mathscr{L}\underline{\mathscr{L}}' = \mathscr{L}\underline{\mathscr{L}}'\underline{\mathrm{Rat}}$, la proposition précédente implique, soit $L \in \mathscr{L}$, soit $L' \in \mathscr{L}'$, d'où la contradiction. Donc $\mathscr{L}\underline{\mathscr{L}}' \subsetneq \mathscr{L}\underline{\mathscr{L}}'\underline{\mathrm{Rat}}$ et on montre par induction que $\forall t \in \mathbb{N}_+$, $\mathscr{L}\underline{\mathscr{L}}'_t \subsetneq \mathscr{L}\underline{\mathscr{L}}'_t\underline{\mathrm{Rat}}$. ▮

COROLLAIRE VII.21. *Soient $\mathscr{L}$ et $\mathscr{L}'$ deux cônes rationnels clos par union tels que $\mathscr{L} \subsetneq \mathscr{L}\underline{\mathscr{L}'}$ et $\mathscr{L}' \not\subseteq \mathscr{L}'\underline{\mathscr{L}'}$. Alors, pour tout $t \in \mathbb{N}_+$, $\mathscr{L}\underline{\mathscr{L}'}_t \subsetneq \mathscr{L}\underline{\mathscr{L}'}_{t+1}$.*

Démonstration. Supposons que $\mathscr{L}\underline{\mathscr{L}'} = \mathscr{L}\underline{\mathscr{L}'}_2$. Alors $\mathscr{L}\underline{\mathscr{L}'} = \mathscr{L}\underline{\mathscr{L}'}_3 = \mathscr{L}\underline{\mathscr{L}'\underline{\mathscr{L}'\underline{\mathscr{L}'}}}$. Prenons deux langages L et L' ne contenant pas le mot vide, définis sur des alphabets disjoints et tels que $L \in \mathscr{L}\underline{\mathscr{L}'}\backslash\mathscr{L}$ et $\underline{\mathscr{L}'} \in \mathscr{L}'\underline{\mathscr{L}'}\backslash\mathscr{L}$. Le langage $s(L', L)$ appartient à $\mathscr{L}\underline{\mathscr{L}'}_3 = \mathscr{L}\underline{\mathscr{L}'}$ et la proposition VII.19 implique, soit $L \in \mathscr{L}$ soit $L' \in \mathscr{L}'$, d'où la dontradiction. On montre, par induction, que $\forall t \in \mathbb{N}^+$, $\mathscr{L}\underline{\mathscr{L}'}_t \subsetneq \mathscr{L}\underline{\mathscr{L}'}_{t+1}$. ∎

PROPOSITION VII.22. *Soit $\mathscr{L}$ un cône rationnel clos par union tel que $\mathscr{L} \neq \mathscr{L}\underline{\mathrm{LULT}}$. Alors, il existe un entier k_0 tel que $\mathscr{L} = \mathscr{L}\underline{\mathrm{LULT}(k_0)} \subsetneq \mathscr{L}\underline{\mathrm{LULT}(k_0+1)}$ et tel que pour tout entier $k > k_0$, on ait:*

i) $\forall t \in \mathbb{N}_+$, $\mathscr{L}\underline{\mathrm{LULT}(k)}_t\, \underline{\mathrm{Rat}} \subsetneq \mathscr{L}\underline{\mathrm{LULT}(k+1)}_t$,

ii) $\forall t \in \mathbb{N}_+$, $\mathscr{L}\underline{\mathrm{LULT}(k)}_t\, \underline{\mathrm{Rat}} \subsetneq \mathscr{L}\underline{\mathrm{LULT}(k)}_{t+1}$ si $k > 1$,

iii) $\forall t \in \mathbb{N}_+$, $\mathscr{L}\underline{\mathrm{LULT}(k)}_t \subsetneq \mathscr{L}\underline{\mathrm{LULT}(k)}_t\, \underline{\mathrm{Rat}}$ si k est pair.

Démonstration. Si $\mathscr{L} \neq \mathscr{L}\underline{\mathrm{LULT}}$, il existe $p \in \mathbb{N}_+$ tel que $\mathscr{L} \subsetneq \mathscr{L}\underline{\mathrm{LULT}(p)}$. Posons p_0 le plus petit entier p vérifiant $\mathscr{L} \subsetneq \mathscr{L}\underline{\mathrm{LULT}(p)}$. Nous avons alors $\mathscr{L} = \mathscr{L}\underline{\mathrm{LULT}(k_0)} \subsetneq \mathscr{L}\underline{\mathrm{LULT}(k_0+1)}$ avec $k_0 = p_0 - 1$. Les inclusions qui apparaissent dans i), ii) et iii) sont évidentes, il nous reste à montrer qu'elles sont strictes:

i) Prenons un langage $L \subseteq T^*$ avec $T \cap \Delta = \varnothing$, appartenant à $\mathscr{L}\underline{\mathrm{LULT}(k)}\backslash\mathscr{L}$. Le langage $L' = \langle L\rangle_k$ appartient à $\mathscr{L}\underline{\mathrm{LULT}(k+1)}$, donc, $\forall t \in \mathbb{N}_+$, $L' \in \mathscr{L}\underline{\mathrm{LULT}(k+1)}_t$. Par contre, $L' \notin \mathscr{L}\underline{\mathrm{LULT}(k)}_{t+1}$. En effet, d'après la proposition VII.5, dans le cas contraire, on aurait $\langle L\rangle_k \in \mathscr{L}$ et $L \in \mathscr{L}$, d'où la contradiction. Comme $\mathscr{L}\underline{\mathrm{LULT}(k)}_t\, \underline{\mathrm{Rat}}$ est inclus dans $\mathscr{L}\underline{\mathrm{LULT}(k)}_{t+1}$, on obtient $L' \in \mathscr{L}\underline{\mathrm{LULT}(k+1)}_t \backslash \mathscr{L}\underline{\mathrm{LULT}(k)}_t\, \underline{\mathrm{Rat}}$.

ii) Si $k = 1$, on a $\mathrm{LULT}(1) = \mathrm{Rat}$, donc $\mathscr{L}\underline{\mathrm{LULT}(1)}_t\, \underline{\mathrm{Rat}} = \mathscr{L}\underline{\mathrm{Rat}} = \mathscr{L}\underline{\mathrm{LULT}(1)}_{t+1}$. Par contre, si $k > 1$, on sait, d'après la proposition V.6 que $\mathrm{LULT}(k)$ n'est pas clos par substitution, donc $\mathrm{LULT}(k) \subsetneq \mathrm{LULT}(k)\, \underline{\mathrm{LULT}(k)}$. Comme k est supérieur à k_0, $\mathscr{L} \subsetneq \mathscr{L}\underline{\mathrm{LULT}(k)}$ et d'après le corollaire VII.21, $\forall t \in \mathbb{N}_+$, $\mathscr{L}\underline{\mathrm{LULT}(k)}_t \subsetneq \mathscr{L}\underline{\mathrm{LULT}(k)}_{t+1}$. Supposons, maintenant, qu'il existe $t \in \mathbb{N}_+$ tel que $\mathscr{L}\underline{\mathrm{LULT}(k)}_t\, \underline{\mathrm{Rat}} = \mathscr{L}\underline{\mathrm{LULT}(k)}_{t+1}$. Comme $\mathrm{LULT}(k)$ est un cône rationnel, $\mathrm{Rat}\, \underline{\mathrm{LULT}(k)} = \mathrm{LULT}(k)$ et on aurait, alors, $\mathscr{L}\underline{\mathrm{LULT}(k)}_{t+2} = \mathscr{L}\underline{\mathrm{LULT}(k)}_t\, \underline{\mathrm{Rat}}\, \underline{\mathrm{LULT}(k)} = \mathscr{L}\underline{\mathrm{LULT}(k)}_{t+1}$, d'où la contradiction.

iii) Si k est impair, $\mathrm{LULT}(k)$ est une FAL, donc $\mathrm{LULT}(k) = \mathrm{LULT}(k)\, \underline{\mathrm{Rat}}$ et $\forall t \in \mathbb{N}_+$, $\mathscr{L}\underline{\mathrm{LULT}(k)}_t = \mathscr{L}\underline{\mathrm{LULT}(k)}_t\, \underline{\mathrm{Rat}}$. Par contre, si k est pair,

$\mathrm{LULT}(k) \subsetneq \underline{\mathrm{LULT}(k)\ \mathrm{Rat}}$. De plus, d'après la proposition VII.1, $\mathscr{L}\mathrm{LULT}(k) \subsetneq$ $\mathscr{L}\underline{\mathrm{LULT}(k)}\ \underline{\mathrm{Rat}}$ et le corollaire VII.20 implique: $\forall t \in \mathbb{N}_+$, $\mathscr{L}\underline{\mathrm{LULT}(k)_t} \subsetneq$ $\mathscr{L}\underline{\mathrm{LULT}(k)_t}\ \underline{\mathrm{Rat}}$. ∎

VIII. Crochet généralisé

Au lieu de faire des substitutions dans un LULT-langage, comme à la section précédente, nous allons, maintenant, effectuer des substitutions dans $S(G)$, le langage de tous les mots "dérivés à partir de l'axiome" dans un EDT0L-système linéaire G, ces substitutions devant préserver les lettres terminales de ce système. De façon plus précise, soient $G = (N, T, R, \phi, \omega)$ un k-EDT0L-système linéaire et $\mathscr{L}$ une famille de langages. Posons:

$$\mathscr{S}(G, \mathscr{L}) = \{\sigma(S(G))/\sigma \text{ est une substitution telle que } \sigma(a) = \{a\},\ \forall a \in T \text{ et } \sigma(X) \in \mathscr{L},\ \forall X \in N\}.$$

Pour tout $k \in \mathbb{N}_+$, l'opérateur de k-crochet fait correspondre à toute famille de langages $\mathscr{L}$, la famille, notée $[\mathscr{L}]_k$, qui est égale à $\{L \in \mathscr{S}(G, \mathscr{L})/G$ est un k'-EDT0L-système linéaire$\}$ si $k = 2k'$ et à $\{L \in \mathscr{S}(G, \mathscr{L})/G$ est un k'-EDT0L-système linéaire libre$\}$ si $k = 2k' - 1$ (il est facile de voir que l'on obtient une famille différente si on remplace "libre" par "libre à gauche").

Remarquons que pour tout cône rationnel $\mathscr{L}$, on pourra toujours supposer que G est sous forme normale sans règle terminale, c'est-à-dire que pour tout langage L appartenant à $[\mathscr{L}]_{2k}$ (resp. $[\mathscr{L}]_{2k-1}$), il existe un k-EDT0L-système l.s.f.n. (resp. l.s.f.n. libre) G sans règle terminale tel que $L \in \mathscr{S}(G, \mathscr{L})$. Pour tout cône rationnel $\mathscr{L}$, $[\mathscr{L}]_1$ est égal au plus petit cône rationnel clos par union et contenant $\mathscr{L}$ et $[\mathscr{L}]_2$ est égal à $[\mathscr{L}]$ qui est le plus petit cône rationnel contenant $\mathscr{L}$ et clos par union et crochet (cf. Boasson, Crestin et Nivat, 1973). Pour toute famille de Langage $\mathscr{L}$, nous poserons $[\mathscr{L}]_* = \bigcup_{k \geqslant 1} [\mathscr{L}]_k$ et nous dirons que $\mathscr{L}$ est *fermé par k-crochet* (resp. fermé par *crochet généralisé*) si $\mathscr{L} = [\mathscr{L}]_k$ (resp. $\mathscr{L} = [\mathscr{L}]_*$).

Montrons d'abord:

Proposition VIII.1. *La famille* LIL $= [\mathrm{Rat}]_* = [\mathrm{LIL}]_*$ *est le plus petit cône rationnel clos par crochet généralisé.*

Démonstration. Soit $G = (N, T, R, \phi, \omega)$ un k-EDT0L-système linéaire. Prenons une substitution σ définie sur $V = N \cup T$ par $\sigma(a) = \{a\}$, $\forall a \in T$ et $\sigma(X) = \varnothing$, $\forall X \in N$. Alors $L(G) = \sigma(S(G)) \in [\mathrm{Rat}]_*$ et $\mathrm{LIL} \subseteq [\mathrm{Rat}]_*$. Considérons, maintenant, une substitution σ' définie sur $N \cup T$ qui vérifie: $\forall a \in T$, $\sigma'(a) = \{a\}$ et $\forall X \in N$, $\sigma'(X) \in \mathrm{LIL}$. Comme N ne contient qu'un nombre fini d'éléments, il existe un entier positif t tel que $\sigma'(X) \in \mathrm{LIL}(t)$. Prenons $k' \in \mathbb{N}_+$

tel que $2k' \in \{t, t+1\}$. Il est alors facile de construire un kk'-EDT0L-système linéaire qui engendre $\sigma'(S(G))$. Donc $[\text{LIL}]_* \subseteq \text{LIL}$ et $[\text{Rat}]_* \subseteq [\text{LIL}]_* \subseteq \text{LIL} \subseteq [\text{Rat}]_*$ implique bien: $\text{LIL} = [\text{Rat}]_* = [\text{LIL}]_*$ est le plus petit cône rationnel clos par crochet généralisé. ∎

Pour tout langage L et tout entier positif k posons:

$$(L)_{2k} = \{wx_1\bar{w}^R \cdots wx_k\bar{w}^R / w \in \{a, b\}^*, x_i \in L, \forall i \in \{1,..., k\}\},$$

$$(L)_{2k-1} = \{wx_1\bar{w}^R \cdots wx_k / w \in \{a, b\}^*, x_i \in L, \forall i \in \{1,..., k\}\}$$
$$\cup \{x_1w \cdots \bar{w}^R x_k w / w \in \{a, b\}^*, x_i \in L, \forall i \in \{1,..., k\}\}.$$

Il est clair que, $\forall k \in \mathbb{N}_+$, $[\text{Rat}]_k = \text{LIL}(k)$. Nous avons, alors, d'après la section VI, $\forall k \in \mathbb{N}_+$, $[\text{Rat}]_k = \mathscr{C}((\{1\})_k)$, le plus petit cône rationnel contenant le langage $(L)_k$ où L est le langage réduit au mot vide. Généralisons ce résultat en montrant:

Proposition VIII.2. *Soit $\mathscr{L}$ un cône rationnel clos par union. Pour tout entier positif k, $[\mathscr{L}]_k$ est égal à $\mathscr{C}(\mathscr{L}'_k)$ le plus petit cône rationnel contenant $\mathscr{L}'_k = \{(L)_k / L \in \mathscr{L}\}$.*

Démonstration. Il est facile de montrer que $[\mathscr{L}]_k$ est un cône rationnel clos par union, contenant $\mathscr{L}'_k$. Donc $\mathscr{C}(\mathscr{L}'_k)$ est inclus dans $[\mathscr{L}]_k$.

Réciproquement, prenons, d'abord, $k = 2k'$ avec $k' \in \mathbb{N}_+$. Soient $G = (N, T, R, \phi, \omega)$ un k'-EDT0L-système l.s.f.n. et σ une $\mathscr{L}$-substitution telle que $\sigma(a) = \{a\}$, $\forall a \in T$. Posons $L' = \sigma(S(G))$ et $\mathscr{L}'' = \{\sigma(X) / X \in N\}$. Comme $\mathscr{L}''$ est une famille finie de langages appartenant à $\mathscr{L}$ qui est un cône rationnel clos par union, il existe un langage $L \in \mathscr{L}$, défini sur un alphabet disjoint de $\{a, b, \bar{a}, \bar{b}\}$ et tel que $\mathscr{L}'' \subseteq \mathscr{C}(L)$. En utilisant le fait que la langage $(\{1\})_k$ est un générateur de $\text{LIL}(k) = [\text{Rat}]_k$, défini sur un alphabet ne contenant aucune lettre occurrant dans un mot de L, il est facile de montrer que $L' \in \mathscr{C}((L)_k)$. Donc $\mathscr{C}(\mathscr{L}'_{2k'}) = [\mathscr{L}]_{2k'}$.

Si k est impair, le même raisonnement implique $\mathscr{C}(\mathscr{L}'_k) = [\mathscr{L}]_k$. ∎

En particulier, si $\mathscr{L}$ est un cône rationnel principal, $\forall k \in \mathbb{N}_+$, $[\mathscr{L}]_k$ est un cône rationnel qui est encore principal. Plus précisément, on obtient:

Corollaire VIII.3. *Soit L un langage inclus dans T^* avec $T \cap \{a, \bar{a}, b, \bar{b}\} = \varnothing$. Alors, $\forall k \in \mathbb{N}_+$, $[\mathscr{C}(L)]_k$ est égal à $\mathscr{C}((L)_k)$.*

Considérons un langage $L \subseteq T^*$ avec $T \cap \{a, \bar{a}, b, \bar{b}\} = \varnothing$. Il est clair que, pour tout cône rationnel clos par union, $\mathscr{L}$, $(L)_k \in [\mathscr{L}]_k$ pour tout $L \in \mathscr{L}$. Par contre $(L)_{k+1}$ ne peut pas appartenir à $[\mathscr{L}]_k \backslash \mathscr{L}$. En effet:

Proposition VIII.4. *Soient $\mathscr{L}$ un cône rationnel clos par union et L un langage* *inclus dans* T^* *avec* $T \cap \{a, b, \bar{a}, \bar{b}\} = \varnothing$. *Alors,* $\forall k \in \mathbb{N}_+$, $(L)_{k+1} \in [\mathscr{L}]_k$ *implique* $(L)_{k+1} \in \mathscr{L}$.

Démonstration. Prenons $k = 2k' - 1$. Soient $G = (N, T, R, \phi, \omega)$ un k'-EDT0L-système l.s.f.n. sans règle terminale et σ une $\mathscr{L}$-substitution telle que $\sigma(a) = \{a\}$, $\forall a \in T$ et $\sigma(S(G)) = (L)_{k+1}$. Si L est non vide, on peut supposer que $\sigma(X) \neq \varnothing$, $\forall X \in N$. Il est, alors, facile de vérifier que $S(G)$ est fini et qu'on peut se ramener au cas où $S(G) = \{(B, 1) \cdots (B, k')/B \in M\}$. Nécessairement, $\forall B \in M$, il existe au plus un $i \in \{1,..., k'\}$ tel que $\sigma((B, i))$ soit infini. Comme $\mathscr{L}$ est un cône rationnel clos par union, on en déduit $(L)_{k+1} = \sigma(S(G)) \in \mathscr{L}$. Si $k = 2k'$, le même raisonnement implique, encore, $(L)_{k+1} \in \mathscr{L}$. ∎

Etudions, maintenant, les langages de $[\mathscr{L}]_k$ qui sont des produits de langages définis sur des alphabets disjoints et montrons:

PROPOSITION VIII.5. *Soient* $\mathscr{L}$ *un cône rationnel et* L_1, L_2 *deux langages définis sur des alphabets disjoints. Alors,* $\forall k \in \mathbb{N}_+$, $L_1L_2 \in [\mathscr{L}]_{k+1}$ *implique, soit* $L_1 \in [\mathscr{L}]_k$, *soit* $L_2 \in [\mathscr{L}]_k$.

Démonstration. Soient T_1, T_2 deux alphabets disjoints tels que $L_1 \subseteq T_1^*$ et $L_2 \subseteq T_2^*$. Si $L_1L_2 \in [\mathscr{L}]_{k+1}$ avec $k + 1$ pair le résultat cherché se déduit directement de la proposition VIII.11.

Prenons, donc, $k + 1 = 2k' - 1$ avec $k' \geqslant 2$ et considérons un k'-EDT0L-système l.s.f.n., libre, $G = (N, T, R, \phi, \omega)$ avec $N = M \times \{1,..., k'\}$, $V = N \cup T$, $A = nt(\omega)$, $T = T_1 \cup T_2$ et une $\mathscr{L}$-substitution σ définie sur V telle que $\sigma(a) = \{a\}$, $\forall a \in T$ et $L_1L_2 = \sigma(S(G))$. On peut supposer que $\sigma(S(G)) = \sigma(S(G)\backslash T^*)$. En effet, dans le cas contraire, posons $M' = M \cup \{F\}$ avec $F \notin M$, $N' = M' \times \{1,..., k'\}$, $R' = R \cup \{d_1\}$ avec $d_1 \notin R$ et considérons le système $G' = (N', T, R', \phi', \omega)$ où ϕ' est définie par:

— $\forall d$, règle non terminale de G, $\forall X \in V$, $X\phi'(d) = X\phi(d)$,

— $\forall d$, règle terminale de G avec $B = ntg(d)$, on pose $(B, i)\,\phi'(d) = (F, i)$, $\forall i \in \{1,..., k'\}$,

— $\forall i \in \{1,..., k'\}$, $(F, i)\,\phi'(d_1) = 1$.

Etendons σ à V' en posant $\sigma((F, i)) = \{1\}$, $\forall i \in \{1,..., k'\}$. Il est, alors, clair que $\sigma(S(G')\backslash T^*) = \sigma(S(G'))$.

Pour $i = 1, 2$, h_i désignera l'homomorphisme défini sur V par $h_i(a) = a$ si $a \in T_i \cup N$, 1 sinon. Considérons le système $G_1 = (N_1, T_1, R_1, \phi_1, \omega_1)$ avec $N_1 = M \times \{1,..., k' - 1\}$, $\omega_1 = (A, 1) \cdots (A, k' - 1)$, $R_1 = \{d \in R/\forall B \in M, l_{T_1}((B, k')\,\phi(d)) = 0\}$ et où ϕ_1 est défini par: $\forall X \in V_1 = N_1 \cup T_1$, $\forall d \in R_1$, $X\phi_1(d) = h_1(X\phi(d))$.

Soit σ_1 la $\mathscr{L}$-substitution définie sur V_1 par $\sigma_1(a) = \{a\}$, $\forall a \in T_1$ et $\forall B \in M$, $\forall j \in \{1,..., k' - 1\}$, $\sigma_1((B, j)) = h_1(\sigma((B, j)))$ si $\sigma((B, k')) \subseteq T_2^*$, $\varnothing$ sinon. Il est facile de vérifier que $L_1' = \sigma_1(S(G_1))$ est inclus dans L_1 et appartient à $[\mathscr{L}]_{2k'-2}$.

Considérons le système $G_2 = (N_2, T_2, R_2, \phi_2, \omega_2)$ avec $N_2 = M \times \{k'\}$,

$\omega_2 = (A, k')$, $R_2 = \{d \in R / \forall B \in M,\ \forall j \in \{1,\dots, k'-1\},\ l_{T_2}((B, j)\,\phi(d)) = 0\}$ et où ϕ_2 est défini par: $\forall X \in V_2 = N_2 \cup T_2$, $\forall d \in R_2$, $X\phi_2(d) = h_2(X\phi(d))$.

Soit σ_2 la $\mathscr{L}$-substitution définie sur V_2 par $\sigma_2(a) = \{a\}$, $\forall a \in T_2$ et $\forall B \in M$, $\sigma_2((B, k')) = h_2(\sigma(B, k'))$ si $\forall j \in \{1,\dots, k'-1\}$, $\sigma((B, j)) \subseteq T_1^*$, $\varnothing$ sinon. Alors $L_2' = \sigma_2(S(G))$ est inclus dans L_2 et appartient à $[\mathscr{L}]_2$ donc à $[\mathscr{L}]_{2k'-2}$.

Prenons $x_1 \in L_1$ et $x_2 \in \mathscr{L}_2$. Il existe alors $\alpha \in R^*$ tel que $\omega\phi(\alpha) = y \in S(G)\backslash T^*$ avec $nt(y) = B$ et $x_1x_2 \in \sigma(y)$. Pour $i = 1, 2$, posons $y_i = \omega_i\phi(\alpha)$. Distinguons deux cas:

i) $\sigma(y_1) \cap T_1^*T_2^+ \neq \varnothing$. Alors $\sigma(y_2) \subseteq T_2^*$ et $x_1 \in \sigma_1(y_1')$ avec $y_1' = \omega_1\phi_1(\alpha)$ donc $x_1 \in L_1'$.

ii) Dans le cas contraire, $\sigma(y_1) \subseteq T_1^*$, et $x_2 \in \sigma_2(y_2')$ avec $y_2' = \omega_2\phi_2(\alpha)$ donc $x_2 \in L_2'$.

Nous en déduisons que $L_1L_2 = L_1'L_2 \cup L_1L_2'$ ce qui implique, soit $L_1 = L_1' \in [\mathscr{L}]_{2k'-2}$, soit $L_2 = L_2' \in [\mathscr{L}]_{2k'-2}$. ▮

COROLLAIRE VIII.6. *Soient $\mathscr{L}$ un cône rationnel clos par union, k un entier positif et L un langage inclus dans T^* avec $c \notin T$. Alors, si, $\forall p \in \mathbb{N}_+$, $(Lc)^p \in [\mathscr{L}]_k$ nous avons, $\forall p \in \mathbb{N}_+$, $(Lc)^p \in \mathscr{L}$.*

Démonstration. Si $k = 1$, comme $\mathscr{L}$ est clos par union, nous obtenons tout de suite le résultat puisqu'alors $[\mathscr{L}]_1 = \mathscr{L}$. Si k est supérieur à 1, par hypothèse, $\forall p \in \mathbb{N}_+$, $(Lc)^{2p} \in [\mathscr{L}]_k$ et comme $c \notin T$, $(Lc)^{2p}$ est rationnellement équivalent à $(Lc)^p L'$ où L' est la "recopie" de $(Lc)^p$ sur un alphabet disjoint. La proposition précédente entraîne, alors, $\forall p \in \mathbb{N}_+$, $(Lc)^p \in [\mathscr{L}]_{k-1}$ et on obtient le résultat par induction. ▮

Supposons, maintenant que $[\mathscr{L}]_k$ soit clos par produit et prenons dans $[\mathscr{L}]_k$ un langage $L \subseteq T^*$ avec $c \notin T$. Nous avons, alors $\forall p \in \mathbb{N}_+$, $(Lc)^p \in [\mathscr{L}]_k$ et d'après le corollaire précédent, $\forall p \in \mathbb{N}_+ (Lc)^p \in [\mathscr{L}]_k$ donc $L \in [\mathscr{L}]_k$ ce qui implique $\mathscr{L} = [\mathscr{L}]_k$:

COROLLAIRE VIII.7. *Soit $\mathscr{L}$ un cône rationnel clos par union. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $[\mathscr{L}]_k$ est clos par produit si et seulement si $[\mathscr{L}]_k = \mathscr{L} = \mathscr{L}\mathrm{Fin}$ où $\underline{\mathrm{Fin}}$ désigne la famille des langages finis.*

Pour tout cône rationnel $\mathscr{L}$, il est clair que $[\mathscr{L}]_*$ est clos par produit, donc $\forall L \in [\mathscr{L}]_*$, $\forall p \in \mathbb{N}$, $(Lc)^p \in [\mathscr{L}]_*$. Nous avons, cependant, pour $[\mathscr{L}]_*$ une propriété analogue au corollaire VIII.6.

COROLLAIRE VIII.8. *Soient un langage $L \subseteq T^*$, une lettre $c \notin T$ et $\mathscr{L}$ un cône rationnel clos par union. Alors $(Lc)^* \in [\mathscr{L}]_*$ si et seulement si $(Lc)^* \in \mathscr{L}$.*

Démonstration. Si $(Lc)^* \in [\mathscr{L}]_*$, il existe $k \in \mathbb{N}_+$ tel que $(Lc)^* \in [\mathscr{L}]_k$. Si $k = 1$, comme $\mathscr{L}$ est clos par union, $(Lc)^* \in [\mathscr{L}]_1 = \mathscr{L}$. Si k est supérieur à 1, prenons $d \notin T$. Le langage $(Lc)^* d(Lc)^*$ est rationnellement équivalent à $(Lc)^*$ donc appartient à $[\mathscr{L}]_k$ et la proposition VIII.5 implique $(Lc)^* \in [\mathscr{L}]_{k-1}$. D'où le résultat que l'on obtient par induction. ▮

En particulier:

COROLLAIRE VIII.9. *Soit $\mathscr{L}$ un cône rationnel clos par union. $[\mathscr{L}]_*$ est une* FAL *si et seulement si $[\mathscr{L}]_* = \mathscr{L} = \mathscr{L}\underline{\text{Rat}}$.*

Dans Boasson, Crestin et Nivat (1973), il est montré une intéressante propriété de la fermeture par crochet:

PROPOSITION VIII.10. (Boasson, Crestin et Nivat, 1973). *Soit $\mathscr{L}$ un cône rationnel clos par union, L_1, L_2 deux langages non rationnels définis sur des alphabets disjoints. Alors $L_1L_2 \in [\mathscr{L}]$ implique L_1 et $L_2 \in \mathscr{L}$.*

Nous allons généraliser ce résultat en montrant:

PROPOSITION VIII.11. *Soient $\mathscr{L}$ un cône rationnel, L_1, L_2 deux langages non rationnels définis sur des alphabets disjoints. Alors $L_1L_2 \in [\mathscr{L}]_{2k}$ implique L_1 et $L_2 \in [\mathscr{L}]_{2k-1}$.*

Démonstration. Soient T_1 et T_2 les deux alphabets disjoints tels que $L_1 \subseteq T_1^*$ et $L_2 \subseteq T_2^*$. Prenons $G = (N, T, R, \phi, \omega)$ un k-EDT0L-système l.s.f.n. sans règle terminale avec $N = M \times \{1,..., k\}$, $V = N \cup T$, $T = T_1 \cup T_2$, $nt(\omega) = A$ et une $\mathscr{L}$-substitution σ telle que $\sigma(a) = \{a\}$, $\forall a \in T$ et $L_1L_2 = \sigma(S(G))$.

Prenons $x_1 \in L_1$ et $x_2 \in L_2$. Alors $x_1x_2 \in \sigma(y)$ avec $y = y_1(B, 1) \cdots y_k(B, k) y_{k+1} \in S(G)$ et nous allons examiner dans y où se trouve la "coupure" correspondante au passage de T_1^* à T_2^*. Distinguons deux cas:

1 — y_{k+1} appartient à T_2^*. Alors, il existe un k-EDT0L-système l.s.f.n. G', libre à droite tel que $S(G') = \{z \in V^*N / zT_2^* \cap S(G) \neq \varnothing\}$. Le langage L_1' obtenu en effaçant dans $\sigma(S(G'))$ les lettres de T_2 est inclus dans L_1, contient x_1 et appartient à $[\mathscr{L}]_{2k-1}$.

2 — y_{k+1} appartient à $T_1{}^+T_2^*$. Alors le langage $R_2 = \{z \in T_2^* / V^*T_1{}^+z \cap S(G) \neq \varnothing\}$ est un langage rationnel inclus dans L_2, contenant x_2.

On en déduit que $L_1L_2 = L_1'L_2 \cup L_1R_2$. Comme L_2 est non rationnel, R_2 est strictement inclus dans L_2, ce qui entraîne $L_1 = L_1' \in [\mathscr{L}]_{2k-1}$. On montrerait, de façon symétrique, que $L_2 \in [\mathscr{L}]_{2k-1}$. ▮

On peut aussi montrer:

PROPOSITION VIII.12. *Soient $\mathscr{L}$ un cône rationnel clos par union, L_1,..., L_k des langages non rationnels définis sur des alphabets disjoints avec $k \geqslant 1$. Si le produit $L = L_1 \cdots L_k$ appartient à $[\mathscr{L}]_k$, alors il existe $j \in \{1,..., k\}$ tel que $L_j \in \mathscr{L}$.*

Démonstration. Si $k = 1$, $L_1 \in [\mathscr{L}]_1 = \mathscr{L}$. Si $k = 2k'$, la proposition précédente implique, soit $L_{2k'} \in \text{Rat} \subsetneq \mathscr{L}$, soit $L_1, ..., L_{2k'X1} \in [\mathscr{L}]_{2k'-1}$. On peut, donc, se placer dans le cas où $k = 2k' - 1 \geqslant 3$.

Considérons un k'-EDT0L-système linéaire $G = (N, T, R, \phi, \omega)$ libre, sous forme normale sans règle terminale avec $N = M \times \{1, ..., k'\}$, $V = N \cup T$, $T = T' \cup T''$, $T' \cap T'' = \varnothing$, $L_1L_2 \subsetneq T'^*$, $L_3 \cdots L_k \subsetneq T''^*$, $nt(\omega) = A$ et une $\mathscr{L}$-substitution σ telle que $\sigma(a) = \{a\}$, $\forall a \in T$ et $\sigma(S(G)) = L$. Les homomorphismes h' et h'' sont définis sur V par: $h'(X) = h''(X) = X$, $\forall X \in N$, $h'(a) = a$, $h''(a) = 1$, $\forall a \in T'$ et $h'(b) = 1$, $h''(b) = b$, $\forall b \in T''$. Construisons quatre EDT0L-systèmes linéaires.

Posons $G_g = (N, T', R'_g, \phi'_g, \omega'_g)$ avec $\omega'_g = (A, 1)(A, 2)$, $R'_g = \{d \in R / ((B, 1) \cdots (B, k'))\ \phi(d) = C, 2)\ x_2$ avec $B = ntg(d)$, $C = ntd(d)$ et $x_2 \in (N \cup T'')^*\}$. La fonction ϕ'_g est définie par: $\forall X \in V' = N \cup T'$, $\forall d \in R'_g$ $X\phi'_g(d) = h'(X\phi(d))$. G'_g est libre à droite et à gauche.

Posons $G''_g = (N, T'', R''_g, \phi''_g, \omega''_g)$ avec $\omega''_g = (A, 2) \cdots (A, k')$, $R''_g = \{d \in R / (B, 1) \cdots (B, k'))\ \phi(d) = (C, 1)\ x_1(C, 1)\ x_1(C, 2)\ x_2$ avec $B = ntg(d)$, $C = ntd(d)$ et $x_1 \in T'^*\}$ et $\forall X \in V'' = N \cup T''$, $\forall d \in R''_g$, $X\phi''_g(d) = h''(X\phi(d))$. G''_g est libre à gauche.

Posons $G'_d = (N, T', R'_d, \phi'_d, \omega'_d)$ avec $\omega'_d = (A, 1)$, $R'_d = \{d \in R/((B, 2) \cdots ((B, k'))\ \phi(d) \in (N \cup T'')^*, \forall B \in M\}$ et $\forall X \in V'$, $\forall d \in R'_d$, $X\phi'_d(d) = h'(X\phi(d))$.

Posons $G''_d = (N, T'', R''_d, \phi''_d, \omega''_d)$ avec $\omega''_d = \omega''_d$, $R''_d = \{d \in R / \forall B \in M, (B, 1)\ \phi(d) \in (N \cup T')^*$ et $(B, k')\ \phi(d) \in V^*N\}$ et $\forall d \in R''_d$, $\forall X \in N \cup T''$, $X\phi''_d(d) = h''(X\phi(d))$. G''_d est libre à droite.

La substitution σ' est définie sur $T' \cup M \times \{1, 2\}$ par: $\sigma'(a) = \{a\}$, $\forall a \in T'$ et $\forall B \in M$, $\forall i \in \{1, 2\}$, $\sigma'((B, i)) = h'(\sigma((B, i)))$ si $\sigma((B, j)) \subsetneq T''^*$, $\forall j \in \{2, ..., k'\}$, $\varnothing$ sinon. La substitution σ'' est définie sur $T'' \cup M \times \{2, ..., k'\}$ par $\sigma''(a) = \{a\}$, $\forall a \in T''$ et $\forall B \in M$, $\forall j \in \{2, ..., k'\}$, $\sigma''((B, j)) = h''(\sigma((B, j)))$ si $\sigma((B, 1)) \subsetneq T'^*$, $\varnothing$ sinon. Comme G''_d et G''_g sont des $(k' - 1)$-EDT0L-systèmes libres, $L'' = \sigma''(S(G''_d) \cup S(G''_g))$ appartient à $[\mathscr{L}]_{k-2}$. De plus, L'' est inclus dans $L_3 \cdots L_k$. Prenons $x' \in L_1L_2$ et $x'' \in L_3 \cdots L_k$. Il existe $\alpha \in R^*$ tel que $x'x'' \in \sigma(y_1)$ avec $y_1 = \omega\phi(\alpha)$. Comme $y_1 \in NV^* \cup V^*N$, il est facile de vérifier que, soit $x'' \in L''$, soit $x' \in L' = \sigma'(S(G'_d) \cup S(G'_g)) \subsetneq L_1L_2$. Donc $L = L'L_3 \cdots L_k \cup L_1L_2L''$ ce qui implique, soit $L_3 \cdots L_k = L''$, soit $L_1L_2 = L'$.

Dans le premier cas, $L_3 \cdots L_k \in [\mathscr{L}]_{k-2}$ et on obtient le résultat par induction. Il nous reste donc à montrer que si $L' = L_1L_2$, alors L_1 appartient à $\mathscr{L}$. Soient T_1 et T_2 les alphabets disjoints tels que $L_1 \subsetneq T_1^*$ et $L_2 \subsetneq T_2^*$. Les homomorphismes h_i, $i = 1, 2$ sont définis sur V' par $h_i(X) = X$, $\forall X \in N$, $h_i(a) = a$, si $a \in T_i$, 1 sinon. Posons $Z_d = \sigma'(S(G'_d))$, $Z_g = \sigma'(S(G'_g))$.

Considérons les systèmes linéaires suivants:

— $G'_{g_1} = (N, T_1, R'_{g_1}, (A, 1))$ avec

$R'_{g_1} = \{d \in R'_g / \forall B \in M, (B, 2)\ \phi'_g(d) \in (N \cup T_2)^*\}$ et

$\forall X \in V_1 = N \cup T_1$, $\forall d \in R'_{g_1}$, $X\phi'_{g_1}(d) = h_1(X\phi'_g(d))$.

— $G'_{g_2} = (N, T_2, R'_{g_2}, \phi'_{g_2}, (A, 2))$ avec

$R'_{g_2} = \{d \in R'_g / \forall B \in M, (B, 1)\, \phi'_g(d) \in V_1^*\}$ et

$\forall X \in V_2 = N \cup T_2, \forall d \in R'_{g_2}, X\phi'_{g_2}(d) = h_2(X\phi'_g(d))$.

— $G'_{d_1} = (N, T_1, R'_{d_1}, \phi'_{d_1}, (A, 1))$ avec

$R'_{d_1} = \{d \in R'_d / \forall B \in M, (B, 1)\, \phi'_d(d) \in T'^*NT_2^*\}$ et

$\forall X \in V_1, \forall d \in R'_{d_1}, X\phi'_{d_1}(d) = h_1(X\phi'_d(d))$.

— $G'_{d_2} = (N, T_2, R'_{d_2}, \phi'_{d_2}, (A, 1))$ avec

$R'_{d_2} = \{d \in R'_d / \forall B \in M, (B, 1)\, \phi'_d(d) \in T_1^*NT'^*\}$ et

$\forall X \in V_2, \forall d \in R'_{d_2}, X\phi'_{d_2}(d) = h_2(X\phi'_d(d))$.

Posons $L'_{g_1} = h_1 \circ \sigma'(S(G'_{g_1})) \subseteq L_1$, $L'_{g_2} = h_2 \circ \sigma_2(S(G'_{g_2})) \subseteq L_2$, $L'_{d_1} = h \circ \sigma'$ $(S(G'_{d_1})) \subseteq L_1$ et $L'_{d_2} = h_2 \circ \sigma'_2(L(G'_{d_2})) \subseteq L_2$ où la substitution σ'_2 est définie sur $M \times \{2\} \cup T_2$ par $\forall a \in T_2$, $\sigma_2(a) = \{a\}$ et $\forall B \in M$, $\sigma'_2((B, 2)) = \sigma'((B, 2))$ si $\sigma((B, 1)) \subseteq T_1^*$, $\varnothing$ sinon.

Il est alors facile de vérifier que L'_{g_1} et L'_{d_2} appartiennent à $\mathscr{L}$. D'autre part, comme, pour tout $B \in M$, $\sigma_2((B, 2)) \subseteq \{1\}$, L'_{g_2} et L'_{d_2} sont des langages rationnels. Enfin, il est clair que $Z_d \subseteq L'_{d_1}L_2 \cup L_1L'_{d_2} \subseteq L_1L_2$ et $Z_g \subseteq L'_{g_1}L_2 \cup L_1L'_{g_2} \subseteq L_1L_2$, donc $L_1L_2 = Z_d \cup Z_g = (L'_{d_2} \cup L'_{g_1}) L_2 \cup L_1(L'_{d_2} \cup L'_{g_2})$. Comme L_2 est non rationnel, nous en déduisons que $L_1 = L'_{d_1} \cup L'_{g_1}$ appartient à $\mathscr{L}$. ▮

Par contre, pour tout $k \in \mathbb{N}_+$, on peut trouver des langages non rationnels $L_1, \ldots, L_k$ définis sur des alphabets disjoints, tels que $L = L_1 \cdots L_k \in [\mathscr{L}]_{k+1}$ et $\forall i \in \{1, \ldots, k\}$, $L_i \notin \mathscr{L}$. Prenons en effet $\mathscr{L} = \mathrm{Rat}$ et $\forall i \in \{1, \ldots, k\}$, $L_i = \{a_i{}^n b_i{}^n / n \geqslant 0\}$. Le langage $L = L_1 \cdots L_k$ est de degré $k + 1$, donc appartient à $[\mathscr{L}]_{k+1} = [\mathrm{Rat}]_{k+1} = \mathrm{LIL}(k + 1)$. Remarquons, aussi, que pour k pair, nous pouvons obtenir un résultat plus fort:

PROPOSITION VIII.13. *Soient $\mathscr{L}$ un cône rationnel clos par union, $L_1, \ldots, L_{2k}$ des langages non rationnels définis sur des alphabets disjoints. Si le produit $L = L_1 \cdots L_{2k}$ appartient à $[\mathscr{L}]_{2k}$, il existe $j \in \{1, \ldots, k\}$ tel que $L_{2j-1}L_{2j} \in \mathscr{L}$.*

Démonstration. Soient $G = (N, T, R, \phi, \omega)$ un k-EDT0L-système l.s.f.n. sans règles terminales, avec $N = M \times \{1, \ldots, k\}$, $V = N \cup T$, $nt(\omega) = A$ et une $\mathscr{L}$-substitution σ telle que $\sigma(a) = \{a\}$, $\forall a \in T$ et $\sigma(S(G)) = L$.

Si $k = 1$, soient T_1 et T_2 les deux alphabets disjoints tels que $L_1 \subseteq T_1^*$, $L_2 \subseteq T_2^*$ et $T = T_1 \cup T_2$. On peut supposer, sans nuire à la généralité, que

$\sigma(X) \neq \varnothing\ \forall X \in N$. Soit h_i, $i \in \{1, 2\}$ l'homomorphisme défini sur V par $h_i(a) = a$, si $a \in T_i$ et $h_i(a) = 1$ si $a \in V \backslash T_i$. Posons $R_1 = \{h_1(y)/y \in S(G), \sigma((B, 1) \subseteq T_2^*$ avec $B = nt(y)\}$ et $R_2 = \{h_2(y)/y \in S(G), \sigma((B, 1)) \subseteq T_1^*$ avec $B = nt(y)\}$. Il est clair que R_1 et R_2 sont des langages rationnels inclus respectivement dans L_1 et L_2. Prenons $N' = \{X \in N/\sigma(X) \cap T_1^* T_2^+ \neq \varnothing$ et $\sigma(X) \cap T_1^+ T_2^* \neq \varnothing\}$. Alors, $y_1 X y_2 \in S(G)$ implique $y_1 \in T^*$ et $y_2 \in T^*$. Pour $X \in N'$, posons $R_{X1} = h_1(S(G) \cap T^*XT^*)$ et $R_{X2} = h_2(S(G) \cap T^*XT^*)$. R_{X1} et R_{X2} sont des langages rationnels qui vérifient $R_{X1}\sigma(X)\, R_{X2} \subseteq L_1L_2$. En effet, prenons $y_1 \in R_{X1}$, $y_2 \in R_{X2}$ et $x_1x_2 \in \sigma(X)$ avec $x_1 \in T_1^*$ et $x_2 \in T_2^*$. Comme $y_1 \in R_{X1}$, il existe $y_2' \in T_2^*$ tel que $y_1Xy_2' \in S(G)$ ce qui implique $y_1\sigma(X)\, y_2' \subseteq L_1L_2$, donc $y_1x_1x_2y_2' \in L_1L_2$ et $y_1x_1 \in L_1$. De la même façon on montre que $x_2y_2 \in L_2$ donc $R_{X1}\sigma(X)\, R_{X2} \subseteq L_1L_2$ pour tout $X \in N'$. Il est alors facile de vérifier que $L_1L_2 = R_1L_2 \cup L_1R_2 \cup (\bigcup_{X \in N'} R_{X1}\sigma(X)\, R_{X2})$. Comme L_1 et L_2 appartiennent à $\mathscr{L}$ (proposition VIII.10) et que $\mathscr{L}$ est clos par union, $L_1L_2 \in \mathscr{L}$.

Si $k \geqslant 2$, soient T' et T'' les alphabets disjoints tels que $L' = L_1L_2 \subseteq T'^*$, $L'' = L_3 \cdots L_{2k} \subseteq T''^*$ et $T' \cup T'' = T$. Considérons les systèmes $G' = (N', T', R', \phi', \omega')$ et $G'' = (N'', T'', R'', \phi'', \omega'')$ avec $N' = M \times \{1\}$, $\omega' = (A, 1)$, $R' = \{d \in R/\forall B \in M, \forall i \in \{2,..., k\}, (B, i)\, \phi(d) \in (N \cup T'')^*\}$, $N'' = M \times \{2,..., k\}$, $\omega'' = (A, 2) \cdots (A, k)$, $R'' = \{d \in R/\forall B \in M, (B, 1)\, \phi(d) \in (N \cup T')^*\}$, $\forall X \in N', \forall d \in R', X\phi'(d) = h'(X\phi(d))$ et $\forall X \in N'', \forall d \in R'', X\phi''(d) = h''(X\phi(d))$ h' et h'' étant les homomorphismes définis sur V par $h'(a) = a$ si $a \in V' = N' \cup T'$, 1 sinon et $h''(a) = a$ si $a \in V'' = N'' \cup T''$, 1 sinon. Définissons aussi les substitution σ' sur V' et σ'' sur V'' par $\forall B \in M$, $\sigma'((B, 1)) = h' \circ \sigma((B, 1))$ si $\sigma((B, i)) \subseteq T''^*$, $\forall i \in \{2,..., k\}$, $\varnothing$ sinon et $\forall B \in M$, $\forall i \in \{2,..., k\}$, $\sigma''((B, i)) = h'' \circ \sigma((B, i))$ si $\sigma((B, 1)) \subseteq T'^*$, $\varnothing$ sinon. Il est clair que $L_1' = \sigma'(S(G'))$ appartient à $[\mathscr{L}]_2$, que $L_1'' = \sigma''(S(G''))$ appartient à $[\mathscr{L}]_{2k-2}$ et que $L'L'' = L_1L'' \cup L'L_1''$ ce qui implique, soit $L_1L_2 = L_1' \in [\mathscr{L}]_2$, soit $L_3 \cdots L_{2k} = L_1'' \in [\mathscr{L}]_{2k-2}$. Le résultat s'obtient, alors, par induction. ∎

En particulier, en prenant $k = 1$, on précise la proposition VIII.10.

COROLLAIRE VIII.14. *Soient $\mathscr{L}$ un cône rationnel clos par union, L_1, L_2 des langages non rationnels définis sur des alphabets disjoints. Alors $L_1L_2 \in [\mathscr{L}]$ si et seulement si $L_1L_2 \in \mathscr{L}$.*

Nous pouvons en déduire que si L_1 et L_2 sont des langages définis sur des alphabets disjoints tels que L_1 contienne un mot de longueur supérieure à 1 et $L_2 \notin \mathrm{Rat}$, alors $s(L_1, L_2)$, la substitution marquée de L_2 dans L_1, appartient à $[\mathscr{L}]$ (où $\mathscr{L}$ est un cône rationnel clos par union) implique $s(L_1, L_2) \in \mathscr{L}$. En effet, clairement, $s(L_1, L_2)$ est rationnellement équivalent à $L_1'L_2$ où L_1' est un langage non rationnel défini sur un alphabet disjoint de celui de L_2.

Le corollaire VIII.14 va aussi nous permettre d'obtenir deux autres nouveaux résultats. Soit D_1^* le langage de Dyck sur une lettre, c'est-à-dire la classe du mot vide dans la congruence engendrée par $a_1\bar{a}_1 = \bar{a}_1a_1 = 1$. Dans Latteux (1977b), il était montré que le cône rationnel engendré par D_1^* ne contenait aucun langage égal au produit de deux langages non rationnels définis sur des alphabets disjoints. Le corollaire précédent implique, alors:

COROLLAIRE VIII.15. *Soient L_1 et L_2 deux langages définis sur des alphabets disjoints. Si L_1L_2 appartient au plus petit cône rationnel fermé par crochet contenant D_1^*, alors L_1 ou L_2 est un langage rationnel.*

La fermeture par crochet d'un cône rationnel $\mathscr{L}$ est obtenue en insérant des langages de L, "au milieu" d'un langage linéaire. Donnons une condition nécessaire et suffisante pour que $[\mathscr{L}]$ soit égal à la famille obtenue en insérant, de façon quelconque, des langages de $\mathscr{L}$ dans des langages linéaires. Suivant Greibach (1972), pour deux familles de langages $\mathscr{L}$ et $\mathscr{L}'$, nous poserons:

$$\mathscr{L}' i \mathscr{L} = \{s(L')/L' \in \mathscr{L}' \text{ et } s \text{ est une } \mathscr{L}\text{-insertion}\},$$
$$\mathscr{L}' \cdot \mathscr{L} = \{L_1'L_1 \cup \cdots \cup L_n'L_n/n \geqslant 1, L_i \in \mathscr{L}, L_i' \in \mathscr{L}', \forall i \in \{1,..., n\}\}.$$

COROLLAIRE VIII.16. *Soit $\mathscr{L}$ un cône rationnel clos par union. Les deux propriétés suivantes sont équivalentes:*

i) $[\mathscr{L}] = \mathscr{L}\text{in}\, i\, \mathscr{L}$,

ii) $\mathscr{L} = \mathscr{L} \cdot \mathscr{L}\text{in} = \mathscr{L}\text{in} \cdot \mathscr{L}$.

Démonstration. Supposons que $[\mathscr{L}] = \mathscr{L}\text{in}\, i\, \mathscr{L}$. Posons $L_0 = \{wcw^R/w \in \{a, b\}^*\}$ et $L_1 = \{w_1\, dw_2cw_2{}^R\, dw_1{}^R/w_1 , w_2 \in \{a, b\}^*\}$. Pour tout langage non rationnel L de $\mathscr{L}$ inclus dans T^* avec $T \cap \{a, b, c, d\} = \varnothing$, le langage $L' = i(L_1 , L) \in \mathscr{L}\text{in}\, i\, \mathscr{L} = [\mathscr{L}]$. Comme $\mathscr{L}$ est un cône rationnel, $L' \cap \{a, b\}^*\, dT^* \{a, b, c, d\}^* \in [\mathscr{L}]$ et $LL_0 \in \mathscr{L}$ et le corollaire VIII.14 implique $LL_0 \in \mathscr{L}$. Le langage L_0 est un générateur du cône rationnel $\mathscr{L}\text{in}$, donc pour tout $L' \in \mathscr{L}$, $L'' \in \mathscr{L}\text{in}$, il existe une transduction rationnelle τ, un langage non rationnel $L \in \mathscr{L}$ défini sur un alphabet disjoint de $\{a, b, c, d\}$ tel que $L'L'' = \tau(LL_0) \in \mathscr{L}$. Comme $\mathscr{L}$ est clos par union, on en déduit $\mathscr{L}.\ \mathscr{L}\text{in} \subseteq \mathscr{L}$. On montrerait de la même façon que $\mathscr{L}\text{in}.\ \mathscr{L} \subseteq \mathscr{L}$, ce qui implique $\mathscr{L} = \mathscr{L}\text{in} \cdot \mathscr{L} = \mathscr{L} \cdot \mathscr{L}\text{in}$.

Réciproquement, pour montrer que $[\mathscr{L}] = \mathscr{L}\text{in}\, i\, \mathscr{L}$, il suffit de montrer que pour tout $L \in \mathscr{L}$, $L'' = i(L_0 , L)$ appartient à $[\mathscr{L}]$. Nous pouvons supposer que $L \subseteq T^*$ avec $T \cap \{a, b, c\} = \varnothing$. Posons $L_1'' = L'' \cap \{a, b\}^*\ T^*\{a, b, c\}^*$ et $L_2'' = L'' \cap \{a, b, c\}^*\ T^*\{a, b\}^*$. Le langage $L_1'' = \{wxw^R/w \in \{a, b\}^*, x \in LL_0\}$ appartient à $[\mathscr{L}]$ puisque $LL_0 \in \mathscr{L} \cdot \mathscr{L}\text{in} = \mathscr{L}$. De même $L_2'' \in [\mathscr{L}]$ et $\mathscr{L}'' = L_1'' \cup L_2'' \in [\mathscr{L}]$. ▌

Considérons de nouveau les opérations unaires $\langle\ \rangle_k$ et $\langle\langle\ \rangle_k$ définies à la section VII. Soit $\mathscr{L}$ un cône rationnel. Il est facile de vérifier que, $\forall k \in \mathbb{N}_+$, $[\mathscr{L}]_k$ est inclus dans $\mathscr{L}\underline{\text{LULT}(k)}$. D'après les propositions VII.5 et VII.13, nous avons pour tout langage $L \subseteq T^*$ avec $T \cap \Delta = \varnothing$ des propriétés équivalentes, c'est-à-dire $\forall k \in \mathbb{N}_+$, $\langle L\rangle_k \in [\mathscr{L}]_k$ implique $\langle L\rangle_k \in \mathscr{L}$ et $\langle\langle L\rangle_{k+1} \in [\mathscr{L}]_{k+1}$ implique $\langle\langle L\rangle_{k+1} \in \mathscr{L}$. Par contre à la place de la proposition VII.9, nous obtenons:

PROPOSITION VIII.17. *Soient $\mathscr{L}$ un cône rationnel et L un langage inclus dans T^* avec $T \cap \Delta = \varnothing$. Alors, pour tout $k \in \mathbb{N}_+$, $\langle L\rangle_k \in [\mathscr{L}]_{k+1}$ si et seulement si $L \in [\mathscr{L}]$.*

Démonstration. Considérons, d'abord le cas où $k = 2k' - 1$. Soient $G = (N, T', R, \phi, \omega)$ un k'-EDT0L-système l.s.f.n., réduit sans règle terminale avec $N = M \times \{1,..., k'\}$, $T' = T \cup \Delta$, $V = N \cup T'$, $nt(\omega) = A$ et une $\mathscr{L}$-substitution σ telle que $\sigma(a) = \{a\}$, $\forall a \in T'$ et $\langle L\rangle_k = \sigma(S(G))$. Si $L \neq \varnothing$, il est facile de voir qu'on peut toujours supposer $\sigma(X) \neq \varnothing$, $\forall X \in N$. Notons $H_1 = \{B \in M/S(G) \cap a_1{}^+(B, 1)\, a_2V^* \neq \varnothing\}$ et $H_2 = \{X \in N/\sigma(X) \cap a_1T'^* \neq \varnothing$ et $\sigma(X) \cap T'^*a_2T'^* \neq \varnothing\}$. L'homorphisme h est défini sur V par $h(b) = 1$ si $b \in \Delta$, b sinon. Il est clair que, pour tout $B \in H_1$, $h \circ \sigma((B, 1)) \subseteq L$ et que pour tout $X \in H_2$, $h \circ \sigma(X)$ est un langage appartenant à $\mathscr{L}$ et inclus dans L. Pour tout $B \in H_1$, considérons $G_B = (N, T, R, \phi', (B, 1))$ où ϕ' est défini par: $\forall Y \in N \cup T$, $\forall d \in R$, $Y\phi'(d) = h(Y\phi(d))$. Nous allons montrer que L est égal à $L_1 \cup L_2$ avec $L_1 = \bigcup_{X\in H_2} h \circ \sigma(X)$ et $L_2 = \bigcup_{B\in H_1} h \circ \sigma(S(G_B))$. Pour montrer cette égalité, prenons $x \in L$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $y = a_1{}^n x a_2{}^n \cdots a_{2k'}^n \in \langle L\rangle_k$. Donc il existe $z \in S(G)$ avec $B = nt(z)$ tel que $\sigma(z) = y$. Distinguons deux cas:

1) Il existe $j \in \{1,..., 2k'\}$ tel que $l_{a_i}(z) = n$. Si nous avons choisi n assez grand, tout $\alpha \in R^*$ vérifiant $\omega\phi(\alpha) = z$ se factorise en $\alpha_1\alpha_2$ avec $z_1 = \omega\phi(\alpha_1) = a_1^{i_1}(C, 1)\, a_2^{i_2} \cdots a_{2k'-1}^{i_{2k'-1}}(C, k')\, a_{2k'}^{i_{2k'}}$ où $\forall j \in \{1,..., 2k'\}$, $0 < i_j < n$. On en déduit que x appartient à $h \circ \sigma(u_1)$ où $u_1 = (C, 1)\, \phi'(\alpha_2)$, donc $x \in h \circ \sigma(S(G_c))$ avec $C \in H_1$, ce qui implique $x \in L_2$.

2) Dans le cas contraire, il est facile de montrer qu'il existe $j \in \{1,..., k'\}$ tel que $(B, j) \in H_2$ et $x \in h \circ \sigma((B, j)) \subseteq L_1$.

Et, comme $L_1 \in [\mathscr{L}]_1$ et $L_2 \in [\mathscr{L}]_2 = [\mathscr{L}]$, $L = L_1 \cup L_2 \in [\mathscr{L}]$.

Si k est pair, un raisonnement analogue montre que $L \in [\mathscr{L}]$ et comme, réciproquement $L \in [\mathscr{L}]$ implique $\langle L\rangle_k \in [\mathscr{L}]_{k+1}$, nous obtenons le résultat souhaité. ▮

De même, on obtient:

PROPOSITION VIII.18. *Soient $\mathscr{L}$ un cône rationnel et L un langage inclus dans T^* avec $T \cap \Delta = \varnothing$. Alors pour tout $k \in \mathbb{N}_+$, $\langle\langle L\rangle_{2k} \in [\mathscr{L}]_{2k+1}$ si et seulement si $L \in [\mathscr{L}]$.*

Par contre, nous avons:

PROPOSITION VIII.19. *Soient $\mathscr{L}$ un cône rationnel clos par union et L un langage inclus dans T'^* avec $T' \cap \Delta = \varnothing$. Alors pour tout $k \in \mathbb{N}_+$, tel que $E_{2k+2} \notin \mathscr{L}$, $\langle\langle L\rangle_{2k+1} \in [\mathscr{L}]_{2k+2}$ si et seulement si L est un langage linéaire.*

Démonstration. Soit $\langle\langle L\rangle_{2k+1} \in [\mathscr{L}]_{2k+2}$ avec $E_{2k+2} \notin \mathscr{L}$. Il existe, alors, un $(k+1)$-EDT0L-système l.s.f.n., réduit sans règle terminale, $G = (N, T, R, \phi, \omega)$ avec $N = M \times \{1, ..., k+1\}$, $T = T' \cup \Delta$, $V = N \cup T$, $nt(\omega) = A$ et une $\mathscr{L}$-substitution σ telle que $\forall a \in T$, $\sigma(a) = \{a\}$, $\forall X \in N$, $\sigma(X) \neq \varnothing$ et $\sigma(S(G)) = \langle\langle L\rangle_{2k+1}$. Posons $H = \{X \in N / \sigma(X) \cap a_1^+ a_2^+ T^* a_3^+ \cdots a_{2k+2}^+ \neq \varnothing\}$. Pour tout $X \in H$, il existe $p, q \in \mathbb{N}$ tels que $L_x = a_1^p g(\sigma(X))\, a_{2k+2}^q$ soit inclus dans E_{2k+2}, g étant l'homomorphisme défini sur T par $g(a) = a$ si $a \in \Delta$, 1 sinon. Pour tout $X \in N \backslash H$ et tout $i \in \{1, ..., 2k+2\}$, $l_{a_i}(x)$ est constant, $\forall x \in \sigma(X)$. Donc il existe $p_0 \in \mathbb{N}_+$ tel que, $\forall X \in N\backslash H$, $\forall i \in \{1, ..., 2k+2\}$, $\forall x \in \sigma(X)$, $l_{a_i}(x) < P_0$. Considérons, maintenant, le système $G' = (N', T', R, \phi', \omega')$ avec $N' = M \times \{1, 2\}$, $V' = N' \cup T'$, $\omega' = (A, 1)(A, 2)$ et où ϕ' est définie de la manière suivante:

Soit $d \in R$ avec $ntg(d) = B$ et $\forall i \in \{1, ..., 2k+2\}$, $((B, i))\phi(d) = u_i(C, i)\, v_i$ tels que $u_1, v_2 \in \Delta^*$ et $\forall j \in \{3, ..., 2k+2\}$, $u_j v_j \in \Delta^*$. Posons $((B, 1))\phi'(d) = (C, 1)\, v_1$ si $v_1 \in T'^*$, v_1'' si $v_1 = v_1' v_1''$ avec $v_1' \in a_2^+$ et $v_1'' \in T'^*$. De même, posons $((B, 2))$ $\phi'(d) = u_2(C, 2)$ si $u_2 \in T'^*$, u_2' si $u_2 = u_2' u_2''$ avec $u_2' \in T'^*$ et $u_2'' \in a_3^+$. Comme G' est libre à gauche et à droite, $L(G')$ est un langage algébrique linéaire et il est clair que $L(G')$ est inclus dans L. Supposons que $L(G') \neq L$. Il existe, alors, $x \in L\backslash L(G')$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w = a_1^n a_2^n x a_3^n \cdots a_{2k+2}^n \in \sigma(S(G))$, donc il existe $y \in S(G)$ avec $nt(y) = B$ tel que $w \in \sigma(y)$. Comme $x \notin L(G')$, $\forall i \in \{1, ..., 2k+2\}$, $l_{a_i}(y)$ est borné et, si nous avons choisi n assez grand, il existe $j \in \{1, ..., 2k+2\}$ tel que $(B, j) \in H$ ce qui implique $a_1^n a_2^n \cdots a_{2k+2}^n \in L_{(B,j)}$. Nous en déduisons que $E_{2k+2} \backslash (\bigcup_{X \in H} L_x)$ est un ensemble fini, donc $E_{2k+2} \in \mathscr{L}$ ce qui contredit l'hypothèse.

Réciproquement, il est clair que pour tout langage algébrique linéaire L, $\langle\langle L\rangle_{2k+1}$ appartient à $\mathrm{LIL}(2k+2) = [\mathrm{Rat}]_{2k+2}$ donc, à fortiori, $\langle\langle L\rangle_{2k+1} \in [L]_{2k+2}$. ▮

Remarquons que cette proposition implique que le lemme VI.11 ne se généralise pas quand on remplace Rat par un cône rationnel quelconque, c'est-à-dire que, $\forall k \in \mathbb{N}_+$, on peut trouver un langage $L \subseteq T^*$ avec, $T \cap \{a, b, \bar{a}, \bar{b}\} = \varnothing$, $(L)_2 \in [\mathscr{L}]_{2k+1}$ et $L \notin [\mathscr{L}]_{2k}$. En effet, soit L' un langage algébrique non linéaire, $L' \subseteq T'^*$ avec $T' \cap \Delta = \varnothing$ et $T' \cap \{a, \bar{a}, b, \bar{b}\} = \varnothing$. Posons $\mathscr{L} = \mathscr{C}(L')$, le plus petit cône rationnel contenant L', et $L = \langle\langle L'\rangle_{2k-1}$ avec $k \geqslant 2$. Il est facile de vérifier que $(L)_2 \in [\mathscr{L}]_{2k+1}$, par contre, comme $E_{2k} \notin \mathscr{L}$ et $L' \notin \mathscr{L}$in, la proposition précédente implique $L \notin [\mathscr{L}]_{2k}$.

Pour tout cône rationnel $\mathscr{L}$, $[\mathscr{L}]_2 = [\mathscr{L}]$ est fermé par crochet. De même $[\mathscr{L}]_*$ est fermé par crochet généralisé, c'est-à-dire que $[\mathscr{L}]_* = [[\mathscr{L}]_*]_*$. Nous avons aussi $[\mathscr{L}]_1$ fermé par union donc $[\mathscr{L}]_1 = [[\mathscr{L}]_1]_1$. Par contre, dès que k est supérieur à 2, nous avons en général $[\mathscr{L}]_k \subsetneq [[\mathscr{L}]_k]_k$. Ceci nous amène, alors, à définir pour tout $k, t \in \mathbb{N}_+$, le cône rationnel $[\mathscr{L}]_k^t$ au moyen des relations:

$$[\mathscr{L}]_k^1 = [\mathscr{L}]_k \text{ et } [\mathscr{L}]_k^{t+1} = [[\mathscr{L}]_k^t]_k .$$

Nous poserons, aussi, $[\mathscr{L}]_k^* = \bigcup_{t\geqslant 1} [\mathscr{L}]_k^t$.

Les différentes propriétés que nous avons démontrées au cours de cette section, nous permettent d'énoncer:

PROPOSITION VIII.20. *Soit $\mathscr{L}$ un cône rationnel clos par union et strictement inclus dans $[\mathscr{L}]_*$. Alors il existe $k_0 \in \mathbb{N}_+$ tel que $\mathscr{L} = [\mathscr{L}]_{k_0} = [\mathscr{L}]_{k_0}^* \subsetneq [\mathscr{L}]_{k_0+1}$ et tel que, $\forall k > k_0$, on ait:*

i) $\forall t \in \mathbb{N}_+$, $[\mathscr{L}]_k^t \subsetneq [\mathscr{L}]_k^{t+1}$ si $k > 2$,

ii) $\forall s, t \in \mathbb{N}_+$, $[\mathscr{L}]_k^*$ et $[\mathscr{L}]_{k+s}^t$ sont incomparables si $k > 2$,

iii) $\forall t \in \mathbb{N}_+$, $[\mathscr{L}]_{k-1}^t \subsetneq [\mathscr{L}]_k^t$,

iv) $[\mathscr{L}]_{k-1}^* \subsetneq [\mathscr{L}]_k^*$.

Démonstration. Si $\mathscr{L} \subsetneq [\mathscr{L}]_*$, il existe $p \in \mathbb{N}_+$ tel que $\mathscr{L} \subsetneq [\mathscr{L}]_p$. Soit p_0 le plus petit entier p tel que $\mathscr{L} \subsetneq [\mathscr{L}]_p$. Comme $\mathscr{L}$ est clos par union, $\mathscr{L} = [\mathscr{L}]_1$, donc $k_0 = p_0 - 1 \in \mathbb{N}_+$ et vérifie $\mathscr{L} = [\mathscr{L}]_{k_0} = [\mathscr{L}]_{k_0}^* \subsetneq [\mathscr{L}]_{p_0} = [\mathscr{L}]_{k_0+1}$. Prenons k supérieur à k_0 et montrons:

i) Prenons L_1 et L_2 deux langages de $[\mathscr{L}]_k^t$. Comme k est supérieur à 2, il est facile de vérifier que $L_1L_2 \in [[\mathscr{L}]_k^t]_k = [\mathscr{L}]_k^{t+1}$. L'égalité entre $[\mathscr{L}]_k$ et $[\mathscr{L}]_k^{t+1}$ entraîne, alors, $[\mathscr{L}]_k^t$ est clos par produit et on obtient par induction en utilisant le corollaire VIII.7, $[\mathscr{L}]_k^t = \mathscr{L} = \mathscr{L}\underline{\mathscr{F}\mathrm{in}}$, d'où la contradiction puisque $\mathscr{L} \subsetneq [\mathscr{L}]_{k_0+1} \subseteq [\mathscr{L}]_k \subseteq [\mathscr{L}]_k^t$.

ii) Montrons d'abord que $\forall k \geqslant k_0$, $[\mathscr{L}]_{k+1}$ n'est pas inclus dans $[\mathscr{L}]_k^*$. En effet, supposons $[\mathscr{L}]_{k+1} \subseteq [\mathscr{L}]_k^*$ et considérons un langage quelconque $L \in \mathscr{L}$. Soit L' la "recopie" de L sur un alphabet disjoint de Δ. Alors $(L')_{k+1}$ appartient à $[\mathscr{L}]_{k+1}$ et donc à $[\mathscr{L}]_k^*$ et il existe $p \in \mathbb{N}_+$, tel que $(L')_{k+1} \in [\mathscr{L}]_k^p$. En utilisant la proposition VIII.4, on obtient, alors, par induction $(L')_{k+1} \in \mathscr{L}$ et donc $(L)_{k+1} \in \mathscr{L}$ ce qui implique, d'après la proposition VIII.2, $\mathscr{L} = [\mathscr{L}]_{k+1}$ ce qui contredit le fait que $\mathscr{L} \subsetneq [\mathscr{L}]_{k_0+1} \subseteq [\mathscr{L}]_{k+1}$. Donc $[\mathscr{L}]_{k+1}$ n'est pas inclus dans $[\mathscr{L}]_k^*$ et à fortiori $\forall s, t \in \mathbb{N}_+$, $[\mathscr{L}]_{k+s}^t$ n'est pas inclus dans $[\mathscr{L}]_k^*$.

Réciproquement, si $k \leqslant 2$, nous avons $[\mathscr{L}]_k^* = [\mathscr{L}]_k \subseteq [\mathscr{L}]_{k+1}$. Par contre, si k est supérieur à 2, il est facile de vérifier que $[L]_k^*$ est fermé par produit. Prenons, alors, un langage $L \in [\mathscr{L}]_{k_0} \backslash \mathscr{L}$, $L \subseteq T^*$ avec $c \notin T$. Comme $k > k_0$, $L \in [\mathscr{L}]_k \subsetneq [\mathscr{L}]_k^*$. Donc $\forall p \in \mathbb{N}_+$, $(Lc)^p \in [\mathscr{L}]_k^*$. Supposons que $[\mathscr{L}]_k^*$ soit inclus dans $[\mathscr{L}]_{k+s}^t$, alors, en obtient, par induction, en utilisant le corollaire VIII.6, $\forall p \in \mathbb{N}_+$, $(Lc)^p \in \mathscr{L}$ et donc $L \in \mathscr{L}$, d'où la contradiction.

iii) D'après le ii), pour $k > k_0$, il existe un langage $L \in [\mathscr{L}]_k \backslash [\mathscr{L}]_{k-1}^*$, donc $L \in [\mathscr{L}]_k^t \backslash [\mathscr{L}]_{k-1}^t$ et nous avons bien $[\mathscr{L}]_{k-1}^t \subsetneq [\mathscr{L}]_k^t$.

iv) Ce langage appartient aussi à $[\mathscr{L}]_k^* \backslash [\mathscr{L}]_{k-1}^*$, donc $[\mathscr{L}]_{k-1}^* \subsetneq [\mathscr{L}]_k^*$. ∎

Remarquons que, même si k est supérieur à k_0, on peut avoir $[\mathscr{L}]_k^t \subseteq [\mathscr{L}]_{k'}^{t'}$ avec $t' < t$. En effet, $\forall k \in \mathbb{N}_+$, il est facile de vérifier, par exemple, que $[\mathscr{L}]_{2k}^2$ est inclus dans $[\mathscr{L}]_{2k'}$ avec $k' = k^2$.

Nous allons terminer en considérant les cas où $\mathscr{L} = \mathrm{Rat}$, $\mathscr{L} = \mathscr{L}\mathrm{in}$ et en comparant, alors, les familles de langages obtenues à la proposition précédente:

LEMME VIII.21. *Soient $\mathscr{L}$ et $\mathscr{L}'$ deux cônes rationnels et k un entier positif. Si $[\mathscr{L}]_{2k+1}$ n'est pas inclus dans la fermeture par crochet de $[\mathscr{L}']_{2k+1}$, alors $\forall t \in \mathbb{N}$, $[\mathscr{L}]_{2k+1}^t \backslash [\mathscr{L}']_{2k+1}^t \neq \varnothing$.*

Démonstration. Si $[\mathscr{L}]_{2k+1}$ n'est pas inclus dans $[\mathscr{L}'']$ où $\mathscr{L}'' = [\mathscr{L}']_{2k+1}$, il existe dans $[\mathscr{L}]_{2k+1} \backslash [\mathscr{L}'']$ un langage $L \subseteq T^*$ avec $T \cap \Delta = \varnothing$. D'après la proposition VIII.17, le langage $L' = \langle L \rangle_{2k}$ appartient à $[\mathscr{L}]_{2k+1}^2$. Montrons que $L' \notin [[\mathscr{L}']_{2k+1}^2]$. En effet, dans le cas contraire, comme $2k \geqslant 2$, on aurait, d'après la proposition VII.5, $L' \in [\mathscr{L}']_{2k+1}^2 = [\mathscr{L}'']_{2k+1}$. La proposition VIII.17 implique, alors, $L \in [\mathscr{L}'']$, d'où la contradiction. On en déduit le résultat cherché par induction. ∎

Nous pouvons, alors, énoncer:

PROPOSITION VIII.22. *Pour tout entier positif k, les propriétés suivantes sont vérifiées:*

i) $[\mathrm{Rat}]_{2k} = [\mathrm{Lin}]_{2k}$,

ii) $\forall t \in \mathbb{N}_+$, $[\mathrm{Lin}]_{2k+1}^t \subsetneq [\mathrm{Rat}]_{2k+1}^{t+1}$,

iii) $[\mathrm{Rat}]_{k+1}^* = [\mathrm{Lin}]_{k+1}^*$,

iv) $\forall t \in \mathbb{N}_+$, $[\mathrm{Lin}]_{2k}^t \subsetneq [\mathrm{Rat}]_{2k+1}^t \subsetneq [\mathrm{Lin}]_{2k+1}^t \subsetneq [\mathrm{Rat}]_{2k+2}^t$.

Démonstration. i) Pour tout cône rationnel $\mathscr{L}$, il est facile de vérifier que $[[\mathscr{L}]]_{2k} = [\mathscr{L}]_{2k}$, $\forall k \in \mathbb{N}_+$ et comme $\mathrm{Lin} = [\mathrm{Rat}]$, on obtient $[\mathrm{Lin}]_{2k} = [\mathrm{Rat}]_{2k}$ et donc, $\forall t \in \mathbb{N}_+$, $[\mathrm{Lin}]_{2k}^t = [\mathrm{Rat}]_{2k}^t$.

ii) Comme $\mathrm{Lin} = [\mathrm{Rat}]$ et $k \geqslant 1$, on a $[\mathrm{Lin}]_{2k+1}^t = [[\mathrm{Rat}]]_{2k+1}^t \subseteq [[\mathrm{Rat}]_{2k+1}]_{2k+1}^t = [\mathrm{Rat}]_{2k+1}^{t+1}$. Montrons, maintenant, que $[\mathrm{Rat}]_{2k+1}^2$ n'est pas inclus dans $[[\mathrm{Lin}]_{2k+1}]$. En effet, $E_{2k+1} \in \mathrm{LIL}(2k+1) = [\mathrm{Rat}]_{2k+1}$, donc $L = E_{2k+1} c E_{2k+1} \in [\mathrm{Rat}]_{2k+1}^2$. Par contre, si $L \in [[\mathrm{Lin}]_{2k+1}]$, on a, d'après le corollaire VIII. 14, $L \in [\mathrm{Lin}]_{2k+1}$ et d'après la proposition VIII.5, $E_{2k+1} \in [\mathrm{Lin}]_{2k}$. Mais comme $[\mathrm{Lin}]_{2k} = [\mathrm{Rat}]_{2k} = \mathrm{LIL}(2k)$ et que E_{2k+1} est un LIL-langage de degré $2k+1$, nous obtenons une contradiction. Pour obtenir le résultat il suffit, alors, d'utiliser le lemme précédent, avec $\mathscr{L} = [\mathrm{Rat}]_{2k+1}$ et $\mathscr{L}' = \mathrm{Lin}$.

(iii) Cette propriété se déduit immédiatement de i) et ii). Remarquons que pour $k = 0$, nous avons $\mathrm{Rat} = [\mathrm{Rat}]_1^* \subsetneq [\mathrm{Lin}]_1^* = \mathrm{Lin}$.

iv) Comme Rat $\subsetneq [\mathrm{Rat}]_2$ et Lin $\subsetneq [\mathrm{Lin}]_3$, la proposition VIII.20 implique $\forall t,\ k \in \mathbb{N}_+$, $[\mathrm{Rat}]^t_{2k} \subsetneq [\mathrm{Rat}]^t_{2k+1}$ et $[\mathrm{Lin}]^t_{2k+1} \subsetneq [\mathrm{Lin}]_{2k+2}$. Nous avons, alors, d'après la propriété i), $[\mathrm{Lin}]^t_k \subsetneq [\mathrm{Rat}]^t_{k+1}$, $\forall k \geqslant 2$. Il nous reste, donc à montrer $[\mathrm{Rat}]^t_{2k+1} \subsetneq [\mathrm{Lin}]^t_{2k+1}$. Prenons le langage $L = \{a^n b^n / n \geqslant 0\}$. Il est facile de montrer que $L' = L^{2k+1}$ appartient à $[\mathrm{Lin}]_{2k+1}$. Par contre $L' \notin [\mathrm{LIL}(2k+1)]$. En effet, comme L' est le produit de deux langages non rationnels, le corollaire VIII.14 implique $L' \in \mathrm{LIL}(2k+1)$, d'où la contradiction puisque L' est un LIL-langage de degré $2k+2$. Nous pouvons, alors, appliquer le lemme précédent avec $\mathscr{L} = \mathrm{Lin}$ et $\mathscr{L}' = \mathrm{Rat}$. ▌

Remerciements

Je tiens à remercier G. Jacob qui est à l'origine des deux dernières sections.

Received: April 22, 1977; revised: December 27, 1978

References

Arnold, A., et Dauchet, M. (1976), Transductions de Forêts Reconnaissables Monadiques, Forêts corégulières, RAIRO R-3, 5–28.

Beauquier, J. (1978a), A remark about the syntactic lemma, *Math. Systems Theory*, in press.

Beauquier, J. (1978b), Substitutions de langages linéaires et à compteur, *Publication du LITP*, no. 78-5.

Boasson, L., et Nivat, M. (1973), Sur Diverses Familles de Langages Fermées par Transduction Rationnelle, *Acta Inform.* 2, 180–188.

Boasson, L., Crestin, J. P., et Nivat, M. (1973), Familles de Langages Translatables et Fermées par Crochet, *Acta Inform.* 2, 383–393.

Engelfriet, J. (1977), Top-down tree transducers with regular look-ahead, *Math. Systems Theory* **10**, 289–303.

Ginsburg, S. (1975), "Algebraic and Automata-Theoretic Properties of Formal Languages," North-Holland, Amsterdam.

Ginsburg, S., Goldstine, J., et Greibach, S. (1975), Uniformly erasable AFL, *J. Comput. System Sci.* **10**, 165–182.

Ginsburg, S., et Spanier, E. H. (1971), AFL with the semilinear property, *J. Comput. System Sci.* **5**, 365–396.

Ginsburg, S., et Spanier, E. H. (1974), On incomparable abstract family of languages (AFL), *J. Comput. System Sci.* **9**, 88–108.

Greibach, S. (1966), The unsolvability of the recognition of linear context-free languages, *J. Assoc. Comput. Mach.* **13**, 582–587.

Greibach, S. (1970), Chains of full AFL's, *Math. Systems Theory* **4**, 231–242.

Greibach, S. (1972), Simple syntactic operators on full semi-AFL's, *J. Comput. System Sci.* **6**, 30–76.

Greibach, S. (1978), One way finite visit automata, *Theor. Comput. Sci.* **6**, 175–221.

Jacob, G. (1975), "Représentations et Substitutions Matricielles dans la Théorie Algébrique des Transductions," Thèse Sc. Math., Univ. Paris VII, Paris.

LATTEUX, M. (1974), "Langages Simultanés," Publication du Laboratoire de Calcul de l'Université de Lille 1, no. 46.
LATTEUX, M. (1976), Intersection de Langages Algébriques Bornés, *Acta Inform.*, in press.
LATTEUX, M. (1977a), Cônes Rationnels Commutativement clos, *RAIRO Inform. Théor.* 11, 29–51.
LATTEUX, M. (1977b), Produit dans le cône rationnel Engendré par D_1^*, *Theor. Comput. Sci.* **5**, 129–134.
LATTEUX, M. (1977c), "EDT0L-Systèmes ultralinéaires et opérateurs associés," Publication du Laboratoire de Calcul de l'Université de Lille 1, no. 100.
LATTEUX, M. (1978), "Une note sur le lemme syntaxique de Greibach," Publication du Laboratoire de Calcul de l'Université de Lille 1, no. 106.
NIVAT, M. (1968), Transductions des langages de Chomsky, *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* **18**, 339–455.
NIVAT, M. (1975), "Opérateurs sur les Familles de langages," rapport de recherche IRIA no. 106.
RAJLICH, V. (1972), Absolutely parallel grammars and two-way finite state transducers, *J. Comput. System Sci.* **6**, 324–342.
ROZENBERG, G., ET HERMAN, G. T. (1975), "Developmental Systems and Languages," North–Holland, Amsterdam.
ROZENBERG, G., ET VERMEIR, D. (1978), On ET0L-Systems of finite index, *Inform. Contr.* **38**, 103–133.

Printed in Belgium